تصحيح الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا شعبة العلوم الرياضية أ و ب مادة الرياضيات الدورة العادية 2012	الأستاذ : الحيان محمد أقسام تحضير شهادة التقني العالي الثانوية التقنية ابن الهيثم ورزازات

التمرين الأول :

I. في الحلقة الواحدية $\left(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times\right)$، نعتبر المصفوفتين : $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ و $A=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}-1}{2}&0&0\\0&-2&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$.

1. لدينا :

$$I-A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}-1}{2}&0&0\\0&-2&-1\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3-\sqrt{5}}{2}&0&0\\0&3&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$$

و

$$A^2=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}-1}{2}&0&0\\0&-2&-1\\0&1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}-1}{2}&0&0\\0&-2&-1\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3-\sqrt{5}}{2}&0&0\\0&3&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$$

2. من السؤال الأول نستنتج أن : $A^2=I-A$. إذن : $I=A^2+A=A\left(A+I\right)=\left(A+I\right)A$. وبناء عليه فإن :

$$A^{-1}=A+I=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}-1}{2}&0&0\\0&-2&-1\\0&1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}+1}{2}&0&0\\0&-1&-1\\0&1&2\end{pmatrix}$$

II. لكل عددين حقيقيين a و b من المجال $I=\left]1,+\infty\right[$ ، نضع : $a*b=\sqrt{a^2b^2-a^2-b^2+2}$.

1. ليكن $\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2$ ، لدينا :

$$\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)+1=x^2y^2-x^2-y^2+1+1=x^2y^2-x^2-y^2+2.$$

2. ليكن $\left(x,y\right)\in I^2$، إذن :

$$\left(x,y\right)\in I^2\Rightarrow\begin{cases}x>1\\y>1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2>1\\y^2>1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2-1>0\\y^2-1>0\end{cases}\Rightarrow\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)>0$$

$$\Rightarrow\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)+1>1\Rightarrow\sqrt{\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)+1}>1\Rightarrow x*y>1\Rightarrow x*y\in I$$

ومنه فإن : $\forall\left(x,y\right)\in I^2,\quad x*y\in I$.

وعليه فإن * قانون تركيب داخلي في I.

3. أ- ليكن $(x,y)\in\mathbb{R}^{+*}$. لدينا :

$$\varphi(x)*\varphi(y)=\sqrt{x+1}*\sqrt{y+1}=\sqrt{\left(\sqrt{x+1}^2-1\right)\left(\sqrt{y+1}^2-1\right)+1}=\sqrt{xy+1}=\varphi(xy)$$

إذن φ تشاكل من $\left(\mathbb{R}^{+*},\times\right)$ نحو $(I,*)$.

ليكن $y\in I$. لنحل المعادلة $\varphi(x)=y$ على $\mathbb{R}^{+*}$: $\varphi(x)=y \Leftrightarrow \sqrt{x+1}=y \Leftrightarrow x=y^2-1$

بما أن : $y>1$ ، فإن $y^2-1>0$ أي $x>0$.

ومنه فإن : $\forall y\in I,\quad \exists x\in\mathbb{R}^{+*},\quad \varphi(x)=y$. أي أن φ تقابل من $\mathbb{R}^{+*}$ نحو I.

خلاصة : φ تشاكل تقابلي من $\left(\mathbb{R}^{+*},\times\right)$ نحو $(I,*)$.

ب- بما أن φ تشاكل تقابلي من $\left(\mathbb{R}^{+*},\times\right)$ نحو $(I,*)$ وبما أن $\left(\mathbb{R}^{+*},\times\right)$ زمرة تبادلية (حسب المعطيات) ، فإن $(I,*)$ ومرة تبادلية.

ج- نعتبر المجموعة : $\Gamma=\left\{\sqrt{1+2^m}\ /\ m\in\mathbb{Z}\right\}$. لدينا تباعا :

- ✓ $(I,*)$ زمرة تبادلية.
- ✓ $\Gamma\neq\varnothing$ ، لأن : $\sqrt{2}=\sqrt{1+2^0}\in\Gamma$.
- ✓ $\Gamma\subset I$ ، لأن : $\forall m\in\mathbb{Z},\ 1+2^m>1 \Rightarrow \sqrt{1+2^m}>1$.
- ✓ ليكن $x=\sqrt{1+2^m}$ و $y=\sqrt{1+2^n}$ عنصرين من المجموعة Γ حيث $(m,n)\in\mathbb{Z}^2$. إذن :

$$x*y'=\varphi\left(2^m\right)*\left(\varphi\left(2^n\right)\right)'=\varphi\left(2^m\right)*\left(\varphi\left(2^n\right)^{-1}\right)=\varphi\left(2^m\right)*\varphi\left(2^{-n}\right)=\varphi\left(2^m\times 2^{-n}\right)$$

$$x*y'=\varphi\left(2^{m-n}\right)=\sqrt{1+2^{m-n}}$$

وبما أن $(m,n)\in\mathbb{Z}^2$ ، فإن $m-n\in\mathbb{Z}$ ، إذن $x*y'\in\Gamma$.

وبالتالي فإن $(\Gamma,*)$ زمرة جزية من الزمرة $(I,*)$.

التمرين الثاني :

المستوى العقدي $\mathscr{P}$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

I. نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E):\ i\,z^2+(2-i)\,a\,z-(1+i)a^2=0$ حيث $a\in\mathbb{C}^*$.

1. مميز المعادلة (E) هو : $\Delta=b^2-4ac=\left((2-i)a\right)^2-4i\left[-(1+i)a^2\right]=-a^2=(ia)^2$.

بما ان $a\in\mathbb{C}^*$ ، فإن $\Delta\neq 0$ ، إذن : للمعادلة (E) حلين مختلفين هما : $z_1=\dfrac{-(2-i)a+ia}{2i}=\boxed{(1+i)a}$

و $z_2=\dfrac{-(2-i)a-ia}{2i}=\boxed{ia}$.

2.أ- لدينا : $z_1z_2=(1+i)a\times ia=\boxed{a^2(i-1)}$.

ب-

z_1z_2 عـــدد حقيقـــي $\Leftrightarrow z_1z_2\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow a^2(i-1)\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow a^2(i-1)\in\mathbb{R}^* \quad (\text{لأن : } a\in\mathbb{C}^*)$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Arg}\left(a^2(i-1)\right)\equiv 0\ [\pi]$$

$$\Leftrightarrow 2\operatorname{Arg}(a)+Arg(i-1)\equiv 0\ [\pi]$$

$$\Leftrightarrow 2\operatorname{Arg}(a)+\frac{3\pi}{4}\equiv 0\ [\pi] \quad \left(\text{لأن : } -1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\operatorname{Arg}(a)\equiv -\frac{3\pi}{4}\ [\pi]$$

z_1z_2 عـــدد حقيقـــي $\Leftrightarrow \operatorname{Arg}(a)\equiv -\dfrac{3\pi}{8}\left[\dfrac{\pi}{2}\right]$

II. نعتبر $c\in\mathbb{R}^*$ و $z\in\mathbb{C}^*$ و النقط A و B و C و D و M التي ألحاقها على التوالي 1 و $1+i$ و c و ic و z.

1. أ- A و D و M نقط مستقيمية $\Leftrightarrow \dfrac{z_M-z_A}{z_D-z_A}\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \frac{z-1}{ic-1}\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \overline{\left(\frac{z-1}{ic-1}\right)}=\frac{z-1}{ic-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\bar{z}-1}{-ic-1}=\frac{z-1}{ic-1} \quad (\text{لأن : } c\in\mathbb{R}\Rightarrow \bar{c}=c)$$

$$\Leftrightarrow (\bar{z}-1)(ic-1)=(z-1)(-ic-1)$$

$$\Leftrightarrow (ic-1)\bar{z}-ic+1=-(ic+1)z+ic+1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(ic+1)z+(ic-1)\bar{z}=2ic}$$

ب- $(AD)\perp(OM) \Leftrightarrow \dfrac{z_D-z_A}{z_D-z_O}\in i\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \frac{ic-1}{z}\in i\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \overline{\left(\frac{ic-1}{z}\right)} = -\frac{ic-1}{z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-ic-1}{\overline{z}} = -\frac{ic-1}{z}$$

$$\Leftrightarrow (ic+1)z = (ic-1)\overline{z}$$

$$(AD)\perp(OM) \Leftrightarrow \boxed{(ic+1)z-(ic-1)\overline{z}=0}$$

2. نعتبر $H(h)$ المسقط العمودي للنقطة O على المستقيم (AD).

أ- لدينا : A و D و H نقط مستقيمية و $(AD)\perp(OH)$. حسب السؤال 1- لدينا :

$$\begin{cases} (ic+1)h+(ic-1)\overline{h} = 2ic \\ (ic+1)h-(ic-1)\overline{h} = 0 \end{cases}$$

وبجمع المتساويتين طرفا بطرف ، نجد أن : $2(ic+1)h = 2ic$ ، إذن :

ومنه نستنتج أن : $(ic+1)h = ic \Rightarrow h+ich = ic \Rightarrow ich = \mathrm{ic}-\mathrm{h} \Rightarrow h = 1-\frac{1}{\mathrm{ic}}\mathrm{h}$

$$\Rightarrow h-(1+i) = \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{c}}\mathrm{h}-i \Rightarrow \boxed{h-(1+i) = \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{c}}(\mathrm{h}-c)}$$

ب- بما أن $c\in\mathbb{R}^*$، فإن : $\frac{z_H-z_C}{z_H-z_B} = \frac{h-c}{h-(1+i)} = \frac{c}{i} = -ci \in i\mathbb{R}^*$. إذن :

$Arg\left(\frac{z_H-z_C}{z_H-z_B}\right) \equiv \pm\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ ومنه فإن $\overline{(\overrightarrow{BH},\overrightarrow{CH})} \equiv \pm\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

وبالتالي فإن : $(CH)\perp(BH)$.

التمرين الثالث :

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E): 143x-195y=52$

1. أ- لدينا على التوالي :

$$195 = 1\times 143 + 52$$
$$143 = 2\times 52 + 39$$
$$52 = 1\times 39 + 13$$
$$39 = 3\times 13 + 0$$

حسب خوارزمية أقليدس ، لدينا : $195 \wedge 143 = 13$.

بما أن : $195 \wedge 143 = 13$ و 13 يقسم 52 ، فإن للمعادلة (E) حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

ب- حسب المعطيات $(-1,-1)$ حل خاص للمعادلة (E). لدينا : $(E) \Leftrightarrow (F)11x-15y=4$ و $11\wedge 15=1$.

ليكن (x,y) حلا للمعادلة .إذن :

$$\ominus \quad \begin{array}{l} 11\times x-15\times y=4 \\ 11\times(-1)-15\times(-1)=4 \\ \hline \end{array}$$

وبطرح المتساويتين طرفا بطرف ، نجد أن : $11(x+1)-15(y+1)=0$ أي $(\mathscr{L})$: $\boxed{11(x+1)=15(y+1)}$.

إذن : 15 يقسم $11(x+1)$ و بما أن $11\wedge 15=1$، فإنه حسب مبرهنة كوص ، لدينا : 15 يقسم $x+1$.

ومنه نجد أن : $\exists k\in\mathbb{Z},\quad x+1=15k$. المتساوية $(\mathscr{L})$ ، تصير في هذه الحالة كما يلي : $11\times 15k=15(y+1)$

أي $y+1=11k$.

لتكن S مجموعة حلول المعادلة (E). إذن : $S\subset S_1$ حيث $S_1=\left\{(-1+15k,-1+11k)\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

ونتحقق عكسيا من أن $S_1\subset S$ وذلك بالتعويض في المعادلة (F).

وبالتالي فإن : $S=\left\{(-1+15k,-1+11k)\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

2. نعتبر $n\in\mathbb{N}^*$ حيث $n\wedge 5=1$. لدينا : 5 عدد أولي و $n\wedge 5=1$. حسب مبرهنة فيرما الصغرى، نجد أن :

$n^4\equiv 1\ [5]$

إذن لكل k من $\mathbb{N}$ ، لدينا : $n^{4k}\equiv 1\ [5]$.

3. أ- نعتبر $n\in\mathbb{N}^*$ و $(x,y)\in\mathbb{N}^{*2}$ حيث $x\equiv y\ [4]$. إذن : $\exists k\in\mathbb{N},\ x=y+4k$.

نضع $n\wedge 5=d$. إذن : $d\in\mathbb{N}^*$ و d/n و $d/5$. إذن : $d=1$ أو $d=5$.

إذا كان $d=1$ ، فإن : $n\wedge 5=1$ ، فإنه حسب السؤال الثاني ، لدينا : $n^{4k}\equiv 1\ [5]$ إذن :

$n^y\times n^{4k}\equiv n^y\ [5]$.

أي : $n^{y+4k}\equiv n^y\ [5]$ وبالتالي فإن : $n^x\equiv n^y\ [5]$.

إذاكان $d=5$، فإن $5/n$ ، إذن : $5/n^x$ و $5/n^y$ ومنه فإن $5/n^x-n^y$. أي: $n^x\equiv n^y\ [5]$.

في كلتا الحالتين ، لدينا : $\boxed{n^x\equiv n^y\ [5]}$ لكل n من $\mathbb{N}^*$.

ب- نعتبر $(x,y)\in\mathbb{N}^{*2}$. نعلم أن : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ n^x\equiv n^y\ [5]$.

ونعلم أن n و n^x لهما نفس الزوجية لكل n من $\mathbb{N}^*$. إذن n^x و n^y لهما نفس الزوجية لكل n من $\mathbb{N}^*$. إذن :

$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ n^x\equiv n^y\ [2]}$.

ليكن $n\in\mathbb{N}^*$. لدينا : $n^x\equiv n^y\ [5]$ و $n^x\equiv n^y\ [2]$. إذن :

5 يقسم n^x-n^y و 2 يقسم n^x-n^y و $5\wedge 2=1$ يستلزم أن 5×2 يقسم n^x-n^y.

وبالتالي فإن : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n^x \equiv n^y \ [10]}$.

4. ليكن $(x,y) \in \mathbb{N}^2$ حل للمعادلة (E). إذن : $(x,y) \in \mathbb{N}^{*2}$ (لأن الأزواج $(x,0)$ و $(0,y)$ لا تحقق المعادلة (E) و إلا

كان 15 يقسم 4 و 11 يقسم 4)

حسب السؤال الثالث، لدينا : $n^x \equiv n^y \ [10]$. وهذا يعني أن للعددين n^x و n^y نفس رقم الوحدات في نظمة العد العشري.

لأن كل عدد صحيح طبيعي يوافق رقم وحداته في نظمة العد العشري.

التمرين الرابع :

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$. نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f_n(x) = x + \frac{e^{-x}}{n}$.

وليكن $(\mathscr{C}_n)$ المنحنى الممثل للدالة f_n في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x + \frac{e^{-x}}{n} = \lim\limits_{x\to+\infty} x + \frac{1}{ne^x} = \boxed{+\infty}$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x + \frac{1}{ne^x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{nxe^x+1}{ne^x} = \boxed{+\infty}$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$

2. أ- لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} 1 + \frac{1}{nxe^x} = \boxed{-\infty}$ ، لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0^-$.

إذن $(\mathscr{C}_n)$ يقبل فرعا شلجميا بجوار $-\infty$ اتجاهه محور الأراتيب.

ب- $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) - x = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{n} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{ne^x} = \boxed{0}$ ، لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

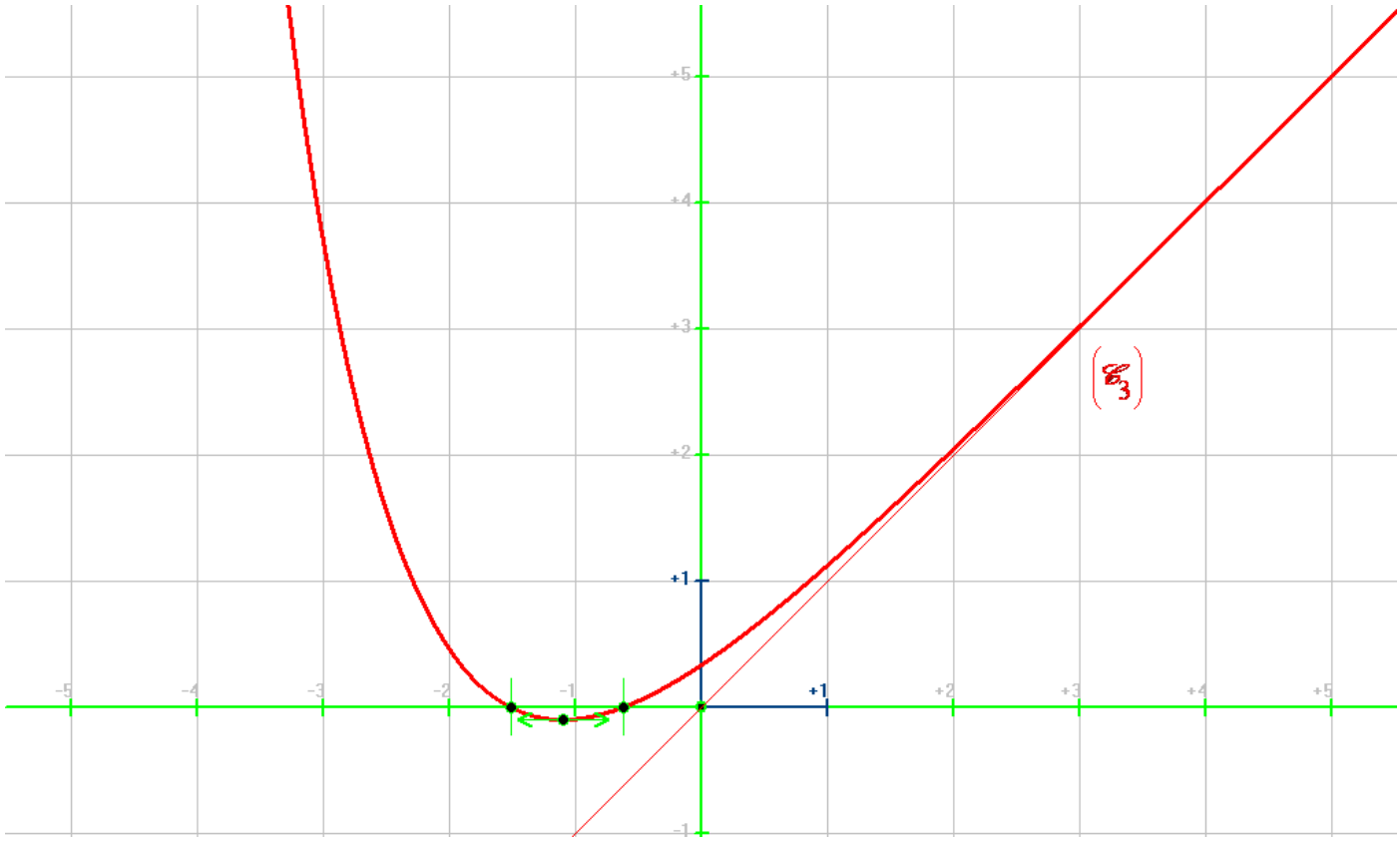
ومنه فإن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$ مقارب للمنحنى $(\mathscr{C}_n)$ بجوار $+\infty$.

ليكن $x \in \mathbb{R}$. لدينا : $f_n(x) - x = \frac{e^{-x}}{n} > 0$. إذن : $(\mathscr{C}_n)$ يوجد فوق (D) على $\mathbb{R}$.

3. ليكن $x \in \mathbb{R}$. لدينا : $f_n'(x) = \left(x + \frac{e^{-x}}{n}\right)' = 1 - \frac{e^{-x}}{n} = \frac{ne^x - 1}{ne^x}$. إذن إشارة $f_n'(x)$ على $\mathbb{R}$ هي إشارة $ne^x - 1$، ولدينا : $ne^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{n} \Leftrightarrow x = -\ln n$.

x	$-\infty$		$-\ln n$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$1-\ln n$	$\nearrow$	$+\infty$

4. منحنى الدالة $(\mathscr{C}_3)$:



5. أ- ليكن n عددا صحيحا طبيعيا بحيث $n \geq 3$. إذن :

$$n > e \Rightarrow \begin{cases} \ln n > 1 \\ \frac{e}{n} < 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{e}{n} < \ln n}$$

ب- ليكن n عددا صحيحا طبيعيا بحيث $n \geq 3$. لدينا :

$x \to x$ دالة حدودية فهي متصلة على $\mathbb{R}$ و $x \to e^{-x}$ دالة أسية فهي متصلة على $\mathbb{R}$ إذن : f_n دالة متصلة على $\mathbb{R}$.

✓ f_n متصلة وتزايدية قطعا على المجال $[-\ln n, +\infty[$. إذن f_n تقابل من $[-\ln n, +\infty[$ نحو المجال

$$J_n = f_n\left([-\ln n, +\infty[\right) = \left[f_n(-\ln n), \lim_{x \to +\infty} f_n(x)\right[= [1 - \ln n, +\infty[$$

وبما أن $n \geq 3 \Rightarrow n > e \Rightarrow \ln n > 1 \Rightarrow 1 - \ln n < 0 \Rightarrow 0 \in J_n$، فإن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا y_n على المجال $[-\ln n, +\infty[$.

ولدينا f_n متصلة وتزايدية قطعا على المجال $[-\ln n, +\infty[$ وخصوصا على المجال $\left[-\frac{e}{n}, 0\right]$، لأن

$-\frac{e}{n} > -\ln n$ و $f_n(0) = \frac{1}{n} > 0$ و $f_n\left(-\frac{e}{n}\right) = -\frac{e}{n} + \frac{e^{-\frac{e}{n}}}{n} = \frac{e^{-\frac{e}{n}} - e}{n} < 0$، لأن :

$$-\frac{e}{n} < 1 \Rightarrow e^{-\frac{e}{n}} < e$$

إذن : $f_n(0) \times f_n\left(-\frac{e}{n}\right) < 0$. حسب مبرهنة القيم الوسطية ، فإن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n على

المجال $\left[-\frac{e}{n},0\right]$ وحسب وحدانية الحل y_n على المجال $\left[-\ln n,+\infty\right[$ ، فإن $\alpha_n = y_n$. إذن :

$$-\frac{e}{n} \le y_n \le 0$$

✓ f_n متصلة وتناقصية قطعا على المجال $\left]-\infty,-\ln n\right]$. إذن : f_n تقابل من $\left]-\infty,-\ln n\right]$ نحو المجال

$$K_n = f_n\left(\left]-\infty,-\ln n\right]\right) = \left[f_n\left(-\ln n\right), \lim_{x\to-\infty} f_n(x)\right[= \left[1-\ln n,+\infty\right[.$$

بما أن $0 \in K_n$ ، فإن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_n على المجال $\left]-\infty,-\ln n\right]$.

✓ خلاصة: المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل بالضبط حلين x_n و y_n بحيث $x_n \le -\ln n$ و $-\frac{e}{n} \le y_n \le 0$.

جـ- لدينا : $\forall n \ge 3,\ \ x_n \le -\ln n$ و $\lim_{n\to+\infty} -\ln n = -\infty$ ، إذن : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty}$.

ولدينا : $\forall n \ge 3,\ \ -\frac{e}{n} \le y_n \le 0$ و $\lim_{n\to+\infty} -\frac{e}{n} = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0$. حسب قانون الدرك ، لدينا :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} y_n = 0}$$

6. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $\left[0,+\infty\right[$ بما يلي :

$$\begin{cases} g(x) = -1 - x\ln x \ \ , \ x>0 \\ g(0) = -1 \end{cases}$$

أ- $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} g(x) = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} -1 - x\ln x = -1 = g(0)$ ، إذن g متصلة على اليمين في 0.

ب- ليكن n عددا صحيحا طبيعيا بحيث $n \ge 3$. لدينا : $f(x_n) = 0 \Rightarrow x_n + \frac{e^{-x_n}}{n} = 0 \Rightarrow -x_n = \frac{e^{-x_n}}{n}$.

إذن :

$$g\left(\frac{-1}{x_n}\right) = -1 + \frac{1}{x_n}\ln\left(\frac{-1}{x_n}\right) = -1 - \frac{\ln(-x_n)}{x_n} = -1 - \frac{\ln\left(\frac{e^{-x_n}}{n}\right)}{x_n} = -1 - \frac{-x_n - \ln n}{x_n} = \frac{\ln n}{x_n}$$

جـ- لدينا $\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty$ إذن $\lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{x_n} = 0$ وبما أن g متصلة على اليمين في 0 ، فإن :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{x_n} = \lim_{n\to+\infty} g\left(\frac{-1}{x_n}\right) = g(0) = -1$$

التمرين الخامس : نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجال $\left[0,1\right]$ بما يلي :

$$\begin{cases} F(x) = \frac{1}{x} - \frac{\ln(1+2x)}{2x^2} \ , \ x \in \left]0,1\right] \\ F(0) = 1 \end{cases}$$

1. ليكن $x \in \left[0,1\right]$ وليكن $t \in \left[0,x\right]$. لدينا :

$$0 \le t \le x \Rightarrow 0 \le 2t \le 2x \Rightarrow 1 \le 1+2t \le 1+2x \Rightarrow \boxed{\frac{1}{1+2x} \le \frac{1}{1+2t} \le 1}.$$

2. ليكن $x \in \left]0,1\right]$.

أ-

$$\frac{2}{x^2}\int_0^x \frac{t}{1+2t}dt = \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{2t}{1+2t}dt = \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{1+2t-1}{1+2t}dt$$

$$= \frac{1}{x^2}\int_0^x 1-\frac{1}{1+2t}dt = \frac{1}{x^2}\int_0^x 1-\frac{1}{2}\frac{\left(1+2t\right)'}{1+2t}dt$$

$$= \frac{1}{x^2}\left[t-\frac{1}{2}\ln\left(1+2t\right)\right]_0^x = \frac{1}{x^2}\left(x-\frac{1}{2}\ln\left(1+2x\right)\right)$$

$$= \frac{1}{x}-\frac{\ln\left(1+2x\right)}{2x^2} = F\left(x\right)$$

ب- $t \in \left[0,x\right]$. لدينا : $\frac{1}{1+2x} \le \frac{1}{1+2t} \le 1$. إذن : $\frac{t}{1+2x} \le \frac{t}{1+2t} \le t$. ومنه فإن :

$$\frac{1}{1+2x}\int_0^x tdt \le \int_0^x \frac{t}{1+2t}dt \le \int_0^x tdt \Rightarrow \frac{1}{1+2x}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x \le \int_0^x \frac{t}{1+2t}dt \le \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+2x}\frac{x^2}{2} \le \int_0^x \frac{t}{1+2t}dt \le \frac{x^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+2x} \le \frac{2}{x^2}\int_0^x \frac{t}{1+2t}dt \le 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+2x} \le F\left(x\right) \le 1$$

لدينا : $\frac{1}{1+2x} \le F\left(x\right) \le 1$, $\forall x \in \left]0,1\right]$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{1+2x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} 1 = 1$ ، إذن : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} F\left(x\right) = 1$.

ومنه فإن : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} F\left(x\right) = F\left(0\right)$. إذن : F متصلة على اليمين في 0.

3. ليكن $x \in \left[0,1\right]$، لدينا : $t \mapsto t^2$ و $t \mapsto \frac{1}{1+2t}$ دالتان متصلتان وقابلتان للإشتقاق على $\left[0,1\right]$ ودالتيهما المشتقة متصلة أيضا على $\left[0,1\right]$. حسب تقنية المكاملة بالأجزاء ، لدينا :

$$\int_0^x \frac{2t}{1+2t}dt = \int_0^x \left(t^2\right)'\frac{1}{1+2t}dt$$

$$= \left[\frac{t^2}{1+2t}\right]_0^x - \int_0^x t^2\left(\frac{1}{1+2t}\right)'dt$$

$$= \frac{x^2}{1+2x} - \int_0^x t^2 \left(-\frac{2}{(1+2t)^2} \right) dt$$

.

$$\int_0^x \frac{2t}{1+2t} dt = \frac{x^2}{1+2x} + 2\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t} \right)^2 dt$$

4. ليكن $x \in]0,1]$.

أ- لدينا : $F(x) = \frac{2}{x^2} \int_0^x \frac{t}{1+2t} dt$.

$t \mapsto \frac{t}{1+2t}$ دالة جدرية فهي متصلة على كل مجال ضمن حيز تعريفها وبالخصوص على المجال $[0,1]$، فهي تقبل دالة أصلية φ معرفة على المجال $[0,1]$. إذن : $F(x) = \frac{2}{x^2} \int_0^x \frac{t}{1+2t} dt = \frac{2}{x^2} \left[\varphi(t) \right]_0^x = \frac{2}{x^2} \left(\varphi(x) - \varphi(0) \right)$

لدينا : $x \mapsto \frac{2}{x^2}$ قابلة للإشتقاق على المجال $]0,1]$ كقصور دالة جدرية و φ دالة قابلة للإشتقاق على $]0,1]$. إذن : F دالة قابلة للإشتقاق على $]0,1]$ ولدينا :

$$F'(x) = \left(\frac{2}{x^2} \left(\varphi(x) - \varphi(0) \right) \right)' = \frac{2}{x^2} \varphi'(x) - \frac{4x}{x^4} \left(\varphi(x) - \varphi(0) \right)$$

$$= \frac{2}{x^2} \times \frac{x}{1+2x} - \frac{4x}{x^4} \int_0^x \frac{t}{1+2t} dt = \frac{2}{x} \left(\frac{1}{1+2x} - \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{2t}{1+2t} dt \right)$$

$$= \frac{2}{x} \left(\frac{1}{1+2x} - \frac{1}{x^2} \left(\frac{x^2}{1+2x} + 2\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t} \right)^2 dt \right) \right)$$

$$= \frac{2}{x} \left(\frac{1}{1+2x} - \frac{1}{x^2} \left(\frac{x^2}{1+2x} + 2\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t} \right)^2 dt \right) \right)$$

$$F'(x) = -\frac{4}{x^3} \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t} \right)^2 dt$$

ب- ليكن $x \in]0,1]$ و $t \in [0,x]$، لدينا : $0 \le \frac{1}{1+2x} \le \frac{1}{1+2t} \le 1$. إذن :

$$\frac{1}{(1+2x)^2} \le \frac{1}{(1+2t)^2} \le 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{t^2}{(1+2x)^2} \le \frac{t^2}{(1+2t)^2} \le t^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1+2x)^2} \int_0^x t^2 dt \le \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t} \right)^2 dt \le \int_0^x t^2 dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1+2x)^2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x \leq \int_0^x \frac{1}{(1+2t)^2}dt \leq \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1+2x)^2}\frac{x^3}{3} \leq \int_0^x \frac{1}{(1+2t)^2}dt \leq \frac{x^3}{3}$$

$$\Rightarrow -\frac{4}{3} \leq -\frac{4}{x^3}\int_0^x \frac{1}{(1+2t)^2}dt \leq -\frac{4}{3}\frac{1}{(1+2x)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{-\frac{4}{3} \leq F'(x) \leq -\frac{4}{3}\frac{1}{(1+2x)^2}}$$

جـ- ليكن $x \in]0,1]$ و $t \in [0,x]$، لدينا :

- ✓ F دالة متصلة على المجال $]0,1]$ وعلى اليمين في 0 فهي متصلة على $[0,1]$ وبالخصوص على $[0,x]$.
- ✓ F دالة قابلة للإشتقاق على المجال $]0,1]$ وبالخصوص على $]0,x[$.

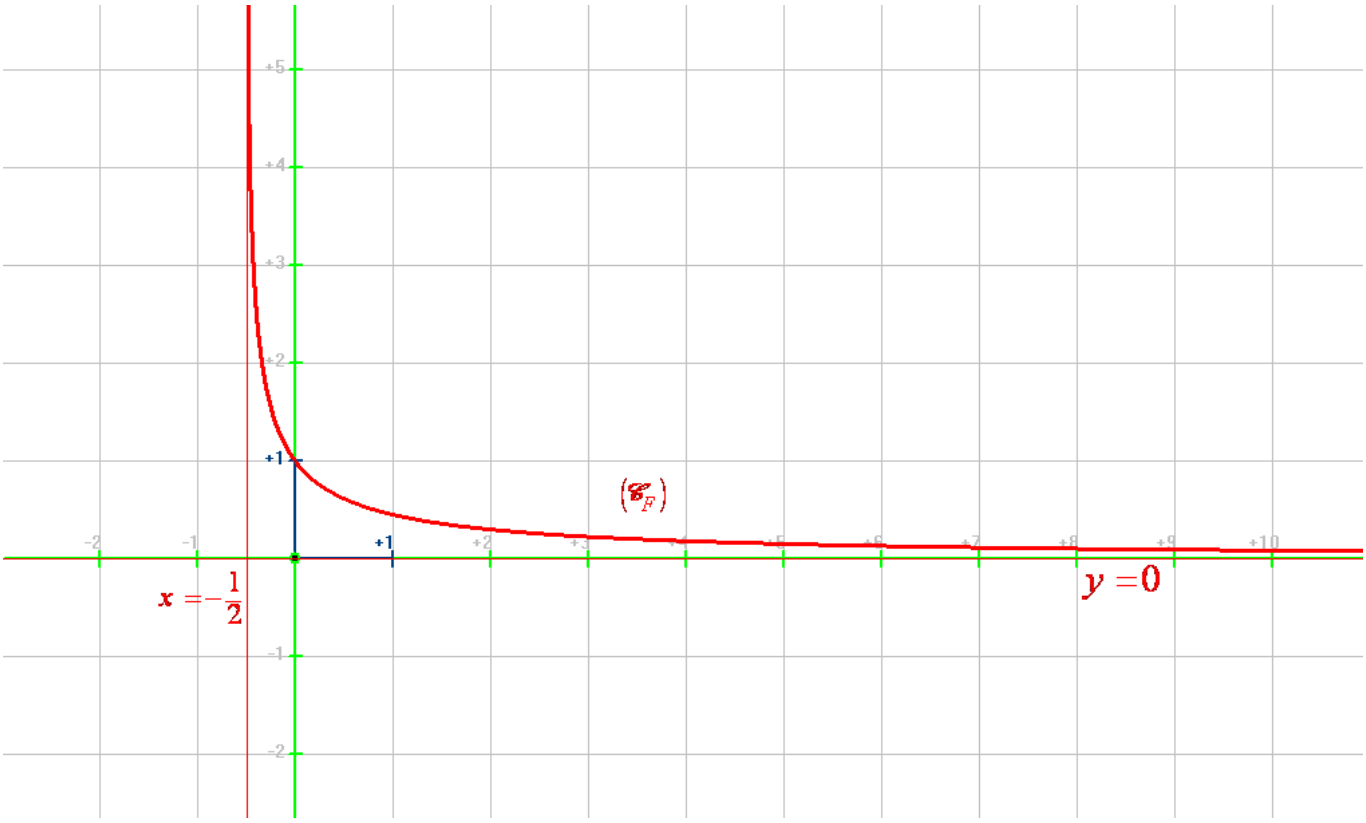
حسب مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة F في المجال $[0,x]$ ، لدينا : $\exists c \in]0,x[, \quad \frac{F(x)-F(0)}{x} = F'(c)$.

وبما ان : $-\frac{4}{3} \leq F'(c) \leq -\frac{4}{3(1+2x)^2}$ ، فإن : $\boxed{-\frac{4}{3} \leq \frac{F(x)-F(0)}{x} \leq -\frac{4}{3(1+2x)^2}}$.

د- لدينا : $\forall x \in]0,1], \quad -\frac{4}{3} \leq \frac{F(x)-F(0)}{x} \leq -\frac{4}{3(1+2x)^2}$ ،

و : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} -\frac{4}{3(1+2x)^2} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} -\frac{4}{3} = -\frac{4}{3}$.

إذن : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = -\frac{4}{3}$. ومنه فإن F قابلة للإشتقاق على اليمين في 0 ولدينا : $\boxed{F'_d(0) = -\frac{4}{3}}$.

انتهى

منحنى الدالة على المجال $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$: