Probabilité2019

Introduction : Définition intuitive de ce qu'est une probabilité :

Ex : Les chances d'être choisie pour représenter la classe dans un évènement.
Les chances pour qu'une opération dure plus de 2 heures.
Les chances pour qu'un nouveau produit soit un succès.

Une probabilité est un nombre associé à un événement qui représente le pourcentage des chances de réalisation de cet événement.
Dans certains cas, ce nombre peut être évalué assez facilement. Par exemple, il y a 40 élèves dans une classe. Lorsqu'on prend une personne au hasard, on aura une chance sur 40 de choisir le premier de la liste.

Dans d'autre cas, on ne pourra l'évaluer aussi facilement. On pourra par contre se baser sur des statistiques sur des expériences similaires. Par exemple, si les sondages accordent 40% du suffrage à un parti, lorsqu'on prend un individu au hasard, 4 fois sur dix on aura un individu préférant ce parti là.

Il existe des cas où il est impossible de prévoir de façon exacte quelles sont ces chances, mais on pourra faire appel à un expert pour déterminer une estimation de cette valeur.
On parlera alors de probabilités subjectives. L'évaluation de ces probabilités demande par contre qu'une certaine cohérence soit respectée. Par exemple, si on juge que les chances au moment d'un accouchement sont égales pour avoir un gars ou une fille on ne pourra pas dire que les chances sont de 75% pour chacun. Ca ferait 150% des chances d'avoir un gars ou une fille, et on est limité à 100%. Dans les pages qui suivent, on tentera d'établir des bases en vu d'établir cette cohérence.

EXPÉRIENCE ALÉATOIRE

- Une expérience est dite *aléatoire* si on ne peut pas prévoir le résultat avant sa réalisation. Exemple : lancer d'une pièce de monnaie, d'un dé.
- A une expérience aléatoire, on associe l'*ensemble* (ou *univers*) *des résultats possibles.*

Exemples : - pour le lancer d'une pièce de monnaie, l'univers des résultats possibles est $\Omega = \{ \text{pile, face}\}$
- Lancer d'un dé normal est $\Omega = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

On appelle l'ensemble de eventualites ou l'univers des eventualites l'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire. Cet ensemble est habituellement noté par la lettre grecque OMEGA : Ω.

Pour déterminer l'univers des eventualites, il est important que l'expérience soit bien définie.

Ex : 1) On lance un dé et on observe le chiffre apparaissant sur la face supérieure du dé;
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

2) On lance 2 pièces de monnaie.
Cet énoncé ne suffit pour décrire l'ensemble fondamental. Il faut ajouter ce qu'on observe :

- Si on compte le nombre de faces :
  $\Omega = \{0, 1, 2\}$
- Si on regarde le résultat sur la première pièce puis sur la deuxième :
  $\Omega = \{(P,P), (P,F), (F,P), (F,F)\}$

Ex : : Le résultat du tirage de la Lotto 6/49

Ω ={(1,2,3,4,5,6), (1,2,3,4,5,7),… (44, 45, 46, 47, 48, 49)}

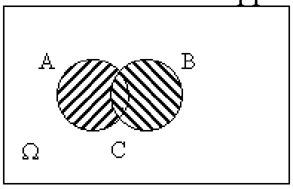
Il y a exactement 13983816 résultats possibles.

ÉVÉNEMENT

- les éléments de Ω sont appelés les *événements élémentaires.*
- Un *événement* est un sous-ensemble de Ω. Par exemple A = {1,3,5} est un événement.

Réunion d'événements: si A et B sont deux événements, ''A ou B'' est réalisé si et seulement si l'un au moins des événements A et B se réalisent. On note A ∪ B

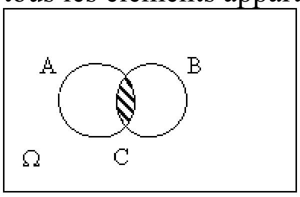
- L'événement C est la réunion des événements A et B (notée C = A∪B) si C est l'événement qui contient tous les éléments appartenant à A ou à B ou aux deux événements :



- Ici C est représenté par la zone hachurée.
- Remarque : Si A s'est réalisé alors automatiquement A∪B s'est réalisé. C'est-à-dire, si le résultat de l'expérience aléatoire est un élément de A alors nécessairement, le résultat de l'expérience se retrouve dans A∪B.

Intersection d'événements

L'événement C est l'intersection des événements A et B (notée C = A∩B) si C est l'événement qui contient tous les éléments appartenant à A et à B :



Ici C est représenté par la zone hachurée.

- Remarque : Si A∩B s'est réalisé alors automatiquement A s'est réalisé et B s'est réalisé aussi. C'est-à-dire, si le résultat de l'expérience aléatoire est un élément de A∩B alors nécessairement, le résultat de l'expérience se retrouve dans A et dans B aussi.

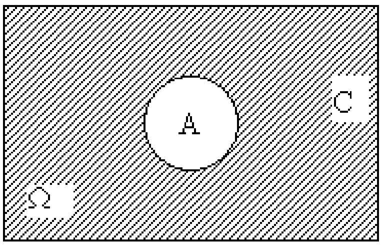
: ''A et B'' est réalisé si et seulement A et B sont réalisés simultanément. On note A ∩ B.

Evénement contraire $\overline{A}$ Complément : c'est le complémentaire de A dans Ω.

$\overline{A}$ comprend les événements élémentaires qui ne sont pas dans A.

Par exemple, dans le cas d'un dé si A = {1, 3, 5} alors $\overline{A}$ = {2, 4, 6}.

L'événement C est le complément de l'événement A (noté C = $\overline{A}$, et on l'appelle evenement contraire) si C est l'événement qui contient tous les éléments de Ω n'appartenant pas à A:



Ici C est représenté par la zone hachurée.

Remarques : $A \cup \overline{A} = \Omega$; $A \cap \overline{A} = \varphi$; $\overline{\overline{A}} = A$

événement impossible c'est un événement qui ne se réalise jamais. C'est l'ensemble vide.

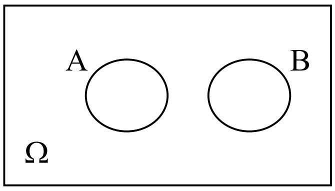
Evénement certain : c'est Ω . L'événement contraire de Ω est $\overline{\Omega} = \varnothing$.

Evénements incompatibles *ou* ***disjoints*** : deux événements A et B sont dits incompatibles lorsqu'ils ne peuvent se réaliser simultanément.

A et B incompatibles $\Leftrightarrow$ A $\cap$ B = $\varnothing$.

Par exemple, 2 événements contraires sont incompatibles.

Les événements A et B sont dit incompatibles (ou mutuellement exclusifs) si $A \cap B = \phi$.



Ex. : On lance deux dés, et on note par (a,b) le résultat de l'expérience où

a = résultat sur le premier dé,

b = résultat sur le deuxième dé.

1-Combien y a-t-il d'élément dans Ω?

2-Combien y a-t-il d'événements possibles?

3-Décrire les événements suivants :

- A : Les deux dés donnent un résultat pair chacun;
- B : Le total des deux dés donne 9;
- C : Le premier dé donne 4.

4-Parmi les événements A, B et C, lesquels se sont réalisé si le résultat de l'expérience est (4,6)?

Réponses :

1- 36

2- $2^{36} = 6\ 871\ 947\ 674$

3- A = {(2,2), (2,4), (2,6), (4,2), (4,4), (4,6), (6,2), (6,4), (6,6)}

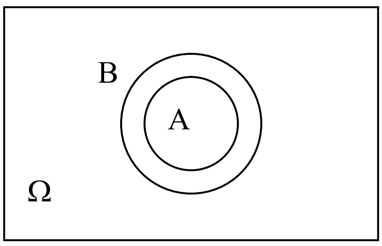
B = {(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)}

C = {(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6)}

4- A et C

Relation d'inclusion

On dira que A implique B (ou que A est inclus dans B et noté $A \subset B$) si tous les éléments de A appartiennent aussi à B.



Remarques :

- $A \subset A$
- $(A \cap B) \subset A$ et $(A \cap B) \subset B$
- $A \subset (A \cup B)$ et $B \subset (A \cup B)$
- $\phi \subset A$
- $A \subset \Omega$

Partition de Ω

Les événements A et B forme une partition de Ω si $A \cup B = \Omega$ et $A \cap B = \phi$.
La notion de partition n'est pas limitée à deux événements.

Remarques :

- A et $\overline{A}$ sont des événements complementaires et il forme une partitionde Ω.
- On peut voir Ω comme une série d'événements disjoints sur lesquels on pourra faire des calculs.

On dit que Les événements $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ forme une partition de Ω si et seulement si

1) $E_i \neq \varnothing, \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

2) $\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}; \ j \neq i \Rightarrow E_i \cap E_j = \varnothing \qquad E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n \cup \ldots = \bigcup_{i=1}^{n} E_i = \Omega$

Propriétés des opérations sur les événements :

La réunion et l'intersection sont commutatives, i.e. $A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A$.

La réunion et l'intersection sont associatives, i.e. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ et $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
Par contre il ne faut pas mélanger les opérations, i.e. $(A \cup B) \cap C \neq A \cup (B \cap C)$.

On utilisera alors la distributivité pour ces opérations mélangées :
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Ces propriétés sont vérifiables à l'aide d'un diagramme de Venn.

Définition mathématique d'une probabilité

définition

- Soit Ω un ensemble fondamental, et $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ une « famille » d'événements elementaires
- Soit p une application qui associe à chaque événement e_i un nombre p_i dans l'intervalle [0,1].

Si

1) $\forall i \in \{1,2,3,\ldots.,n\}; 0 \leq p(e_i) \leq 1$
2) $p(e_1)+p(e_2)+\ldots.+p(e_n)=1$
3) Si Aet B sont deux evenements disjoints alors $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$

Alors p est une probabilité definie sur Ω.

Cette définition permet de poser les théorèmes suivants.

Theoremes

Théorème 1 : $P(\phi)=0$.

Théorème 2 : $Si\ A \subset B, \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Théorème 3 : $P(\overline{A})=1-P(A)$

Théorème 4 : $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$

Ex : Considérons l'expérience qui consiste à tirer au hasard une boule d'un sac contenant 2boules rouges 3boules vertes 4 boules noires. Soit les événements suivants :
A : La boule tirer est rouge : P(A)=2/9.
B : La boule tirer est noire : P(B)=4/9.

demonstration

Théorème 1 : $P(\phi)=0$

$A=A \cup \phi$ et $A \cap \phi=\phi$, donc $P(A)=P(A \cup \phi)$.

$P(A \cup \phi)=P(A)+P(\phi)$ par la 3ème propriété des probabilités.

Donc $P(A)=P(A)+P(\phi)$. Alors nécessairement $P(\phi)=0$.

Théorème 2 : $Si\ A \subset B, \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

$B=A \cup (B \cap \overline{A})$, i.e. on a divisé B en deux sous-ensembles disjoints pour pouvoir en additionner les probabilités.

$P(B)=P(A)+P(B \cap \overline{A})$. Et puisque $P(B \cap \overline{A}) \geq 0$, $P(B) \geq P(A)$.

Théorème 3 : $P(\overline{A})=1-P(A)$

$A \cup \overline{A}=\Omega$ et $A \cap \overline{A}=\phi$, donc

$1=P(\Omega)=P(A \cup \overline{A})=P(A)+P(\overline{A})$, d'où le résultat.

Théorème 4 : $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$

On commence par décomposer $A \cup B$ en deux ensembles disjoints : A et $B \cap \overline{A}$.

On se sert de la 3^{e} propriété des probabilités pour écrire $P(A \cup B)=P(A)+P(B \cap \overline{A})$.

On peut aussi diviser B en deux ensembles disjoints : $B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$

Et donc $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})$ ou $P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(A \cap B)$

Et en remplaçant cette expression dans la précédente on obtient : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Hypothèse d'équiprobabilité

Lorsque tous les éléments constituant Ω ont la même chance d'être realiser on dit que l'hypothese d'equiprobabilite est verifiee

si Ω contient n éléments distincts : $\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, alors $P(e_1) = P(e_2) = \ldots = P(e_n) = \frac{1}{n}$.

Cette situation qui assez fréquente n'est pas toujours vérifiée.

Exemples de cas où l'hypothèse d'équiprobabilité est vérifiée :

1. Prendre une carte d'un jeu de 52 et observer sa couleur ou sa force.
2. Lancer un dé équilibré et observer le chiffre sur le dessus.
3. Tirage à la loterie.
4. Prendre un individu au hasard dans une population de N individus, chacun aura une probabilité 1/N d'être sélectionné.
5. Prendre une pièce au hasard dans la production pour inspection. Chaque pièce aura la même chance d'être celle sélectionnée.

Exemples de cas où l'hypothèse d'équiprobabilité n'est pas vérifiée :

1. Prendre une carte d'un jeu de 52 et observer s'il s'agit d'une figure ou non.
2. Lancer un dé non-équilibré et observer le chiffre sur le dessus.
3. Prendre un individu au hasard dans une population et lui demander le nom de son député par exemple. Puisque les comtés sont de dimension variable, chaque député n'aura pas la même probabilité d'être sélectionné.
4. Lorsque l'ensemble Ω est fini.

Dans ce cas particulier, pour évaluer la probabilité d'un événement A, il suffit de compter le nombre d'éléments dans les ensembles A et Ω, et :

$$P(A) = \frac{\text{Nombre d'éléments dans A}}{\text{Nombre d'éléments dans } \Omega}$$

ou comme on l'exprime souvent :

$$P(A) = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}}$$

Exercice(voir series)

Probabilités conditionnelles et indépendance

Probabilités conditionnelles :

Situation : Soit Ω un ensemble fondamental et A, B, C,… des événements de Ω. Et disons qu'on connaît les probabilités P(A), P(B), P(C)… Maintenant, un informateur nous dit que A s'est réalisé. On cherche alors les nouvelles probabilités de A, B, C,…

Exemple : On lance un dé équilibré. Ω = {1,2,3,4,5,6}. Soit les événements suivants :

A = {1, 2, 3}   P(A) = ½.
B = {2, 4, 6}   P(B) = ½ .
C = {3, 5}   P(C) = 1/3.

Maintenant on vous assure que C s'est réalisé. C'est donc que le résultat est soit 3 soit 5. Il est donc impossible que B se soit réalisé et la nouvelle probabilité de B est rendue = 0.
Pour que A se réalise, parmi les résultats possibles (qui sont maintenant 3 et 5) il faudrait que se soit le 3. On aura donc une chance sur 2 pour que A se réalise sachant que C s'est réalisé.

Dans le cas où l'hypothèse d'équiprobabilité s'applique, on écrivait que pour un événement A :

$$P(A) = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}} = \frac{\text{Nombre d'éléments dans A}}{\text{Nombre d'éléments dans }\Omega}$$

Si on sait maintenant qu'un événement B s'est réalisé, le nombre de cas possibles se trouve diminué au nombre d'éléments dans B.
Les cas favorables sont donc tous ceux qui se trouvent dans A mais aussi dans B, car s'ils ne sont pas dans B, ils ne peuvent pas être considérés comme possibles. Ça nous laissera donc la formule suivante (On note par P(A/B) la probabilité pour que A se réalise sachant que B s'est réalisé) :

$$P(A/B) = \frac{\text{Nombre d'éléments dans A} \cap \text{B}}{\text{Nombre d'éléments dans B}}$$

En divisant le numérateur et le dénominateur par le nombre d'éléments dans Ω, on trouve :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

C'est la définition que nous utiliserons pour décrire la probabilité pour que l'événement A se réalise sachant que l'événement B s'est réalisé. Elle demeure valable, même si l'hypothèse d'équiprobabilité n'est pas vérifiée.

Quelques formules utiles :

1) On sait que $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Donc

$$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B)$$

2) De la même façon, on peut écrire $P(A \cap B) = P(B/A) \cdot P(A)$. Et donc

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B/A)\cdot P(A)}{P(B)}.$$

3) $P(A\cap B\cap C)=P(A\cap B\cap C)\cdot\frac{P(A\cap B)}{P(A\cap B)}\cdot\frac{P(A)}{P(A)}=P(C/A\cap B)\cdot P(B/A)\cdot P(A)$.

4)

- $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ $P(A\cup B/C)=P(A/C)+P(B/C)-P(A\cap B/C)$.
- $P(\overline{A}/C)=1-P(A/C)$ et $P(\overline{A}/\overline{C})=1-P(A/\overline{C})$.

Exemple : Un cours est donné à trois groupes différents :

- Groupe A : Il y a autant de gars que de filles ;
- Groupe B : Il y a 2 fois plus de gars que de filles ;
- Groupe C : Il y a 60% de filles et 40% de gars.

a) On choisit un groupe au hasard, et dans ce groupe on choisit 1 personne. Quelle est la probabilité pour que ce soit une fille ?

b) Si le groupe B a une chance sur deux d'être choisi et que chacun des deux autres groupes à une chance sur 4 d'être choisi, quelle est la probabilité pour que la personne sélectionnée soit une fille ?

Solution :

Soit les événements suivants :

A : Le groupe choisi est le groupe A ;

B : Le groupe choisi est le groupe B ;

C : Le groupe choisi est le groupe C ;

F : La personne sélectionnée est une fille.

a) Si le groupe est choisit au hasard, on a alors $P(A)=P(B)=P(C)=1/3$. De plus, on sait que P(F/A) = ½, P(F/B)=1/3 et P(F/C)=3/5. On cherche P(F) :

$$P(F)=P(F\cap A)+P(F\cap B)+P(F\cap C)$$
$$P(F)=P(F/A)\cdot P(A)+P(F/B)\cdot P(B)+P(F/C)\cdot P(C)$$
$$P(F)=\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{3}+\tfrac{3}{5}\cdot\tfrac{1}{3}=\frac{15+10+18}{90}=\frac{43}{90}$$

b) La différence vient ici de P(A)=P(C)=¼ et P(B)=1/2. On cherche P(F) :

$$P(F)=P(F\cap A)+P(F\cap B)+P(F\cap C)$$
$$P(F)=P(F/A)\cdot P(A)+P(F/B)\cdot P(B)+P(F/C)\cdot P(C)$$
$$P(F)=\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{5}\cdot\tfrac{1}{4}=\frac{15+20+18}{120}=\frac{53}{120}$$

Exemple 2 : On dispose de deux urnes contenant des boules blanches et des boules noires. L'urne A contient 5 boules noires et 6 boules blanches. L'urne B contient 7 boules noires et 4 boules blanches. On tire une boule de l'urne A et on la place dans l'urne B sans la regarder. On tire ensuite une boule de l'urne B.

a) Quelle est la probabilité pour que la deuxième boule tirée soit blanche ?

b) Quelle est la probabilité pour que la première boule tirée soit blanche si la deuxième l'est ?

Solution :

Soit les événements suivants :

N_1 : La première boule est noire ;

B_1 :La première boule est blanche ;

N_2 : La deuxième boule est noire ;

B_2 :La deuxième boule est blanche ;

a) On cherche $P(B_2)$. $B_2=(B_2\cap B_1)\cup(B_2\cap N_1)$.

$$P(B_2)=P(B_2/B_1)\cdot P(B_1)+P(B_2/N_1)\cdot P(N_1)$$

$$P(B_2) = \frac{5}{12}\cdot\frac{6}{11} + \frac{4}{12}\cdot\frac{5}{11} = \frac{50}{132}$$

b) $$P(B_1/B_2) = \frac{P(B_2/B_1)\cdot P(B_1)}{P(B_2)}$$

$$P(B_1/B_2) = \frac{30/132}{50/132} = \frac{3}{5}.$$

Indépendance

Définition : Deux événements A et B sont indépendants si P(A/B) = P(B).

Cela s'interprète comme suit : Le fait de savoir que B s'est réalisé ne modifie pas les chances pour que A se réalise.

Conséquences :

1) $P(A/B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$

Si A et B sont indépendants, alors :

$$P(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$$

C'est la principale conséquence de l'indépendance en probabilité.

2) Si A et B sont indépendants, $P(B/A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} = \dfrac{P(A)\cdot P(B)}{P(A)} = P(B)$.

3) Si A est indépendant de B alors les compléments aussi sont indépendants,

Dem. : $P(\overline{A}/B) = \dfrac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)-P(A\cap B)}{P(B)} = 1-\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = 1-P(A) = P(\overline{A})$.

REMARQUE

: Il ne faut pas confondre INCOMPATIBLE et INDÉPENDANT.

Incompatible : $P(A\cap B) = 0$

Indépendant : $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$.

Exemple : Une urne contient 10 boules noires et 5 boules blanches. On tire une première boule de l'urne. On remet cette boule dans l'urne et on en tire une deuxième. On considère les événements suivants :

N_1 : La première boule est noire ;
B_1 : La première boule est blanche ;
N_2 : La deuxième boule est noire ;
B_2 : La deuxième boule est blanche ;

Les événements R_1 et B_2, R_1 et R_2, B_1 et B_2 ainsi que B_1 et B_2 sont indépendants 2 à 2.
Par contre, les événements R_1 et B_1 ainsi que R_2 et B_2 ne sont pas indépendants 2 à 2.