Dénombrement

1-Cardinal d'un ensemble fini

Rappel

Le cardinal d'un ensemble fini E, est le nombre d'éléments qu'on note Card(E).

Par exemple si E={1; 3; 5; 10} on a Card(E) = 4

Propriétés

Soient A et B deux parties d'un ensemble fini E. On a les relations suivantes :

*Card $(A \cup B)$ = Card(A) + Card(B) − Card $(A \cap B)$

*Dans le cas où A et B sont disjoints (c'est-à-dire $A \cap B = \varnothing$)

alors : Card $(A \cup B)$ = Card(A) + Card(B)

*Card ($\bar{A}$) = Card(E) – Card(A)

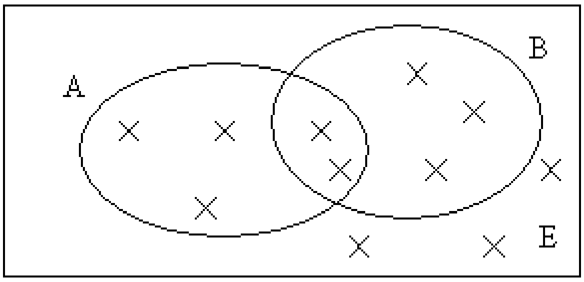
Exemple :

1. Un centre de loisirs accueille 100 enfants. Deux sports sont proposés : le football et le tennis.

A la question : Aimez-vous le football ? 60 enfants lèvent la main.
A la question : Aimez-vous le tennis ? 45 enfants lèvent la main.
A la question : Aimez-vous le tennis et le football ? 18 enfants lèvent la main.
Combien d'enfants n'aiment aucun des deux sports ?

Exercice1

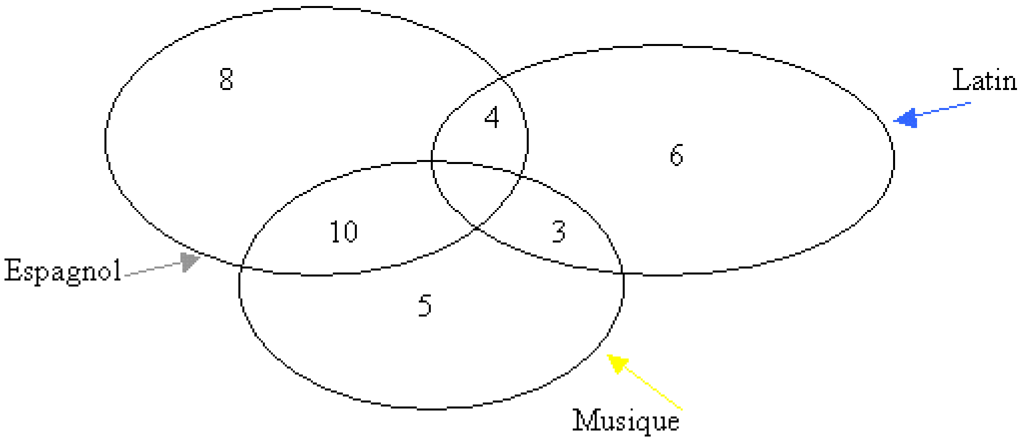
On a représenté sur le diagramme ci-dessous un ensemble E et deux de ses sous-ensembles A et B (chaque élément de E est représenté par une croix).



1. Calculer card(A), card(B), card(A∩B), card(A∪B), card(E).
2. Quelle égalité lie les quatre premiers nombres ?

Exercice 2

Trois options sont offertes aux élèves d'une classe : espagnol, latin, musique. Chaque élève choisit une ou deux options. Le schéma ci-dessous indique le nombre d'élèves pour chaque combinaison d'options possible.



Déterminer le nombre d'eleves qui ont choisit :
1. l'espagnol,
2. uniquement l'espagnol,
3. l'espagnol et le latin,
4. l'espagnol ou le latin,
5. uniquement une des deux langues : espagnol ou latin

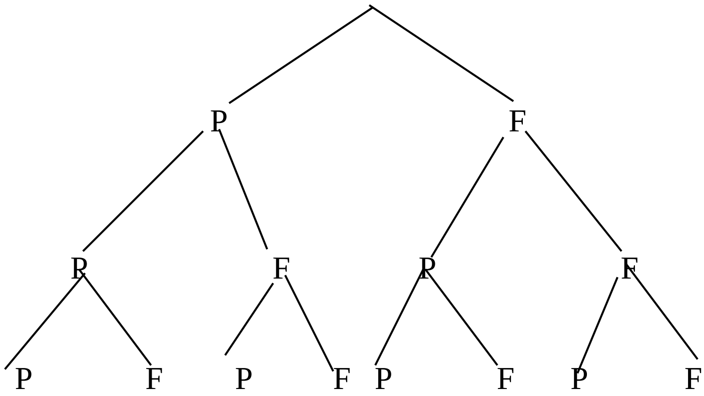
6. une seule des trois options.

2-Principe multiplicatif (principe du produit)

Introduction

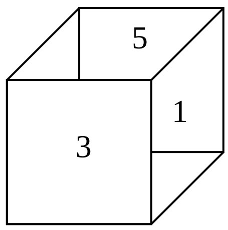
1-lancer d'une pièce de monnaie

a-si on lance une pièce de monnaie une fois ; il est possible d'obtenir l'une des résultats suivant : face (F=face) ou pile (P=pile) et dans ce cas on dit qu'on a deux possibilités
b -si on lance la pièce deux fois on aura les possibilités FF-FP-PF-PP
donc on a 4possibilites
c-si on lance la pièce 3fois on aura les possibilités
PPP ; PPF ; PFP ; FPP
FFP ; FPF ; PFF ; FFF



2-lancer un dé cubique

Un dé cubique a 6 face en général numérote de 1 à 6

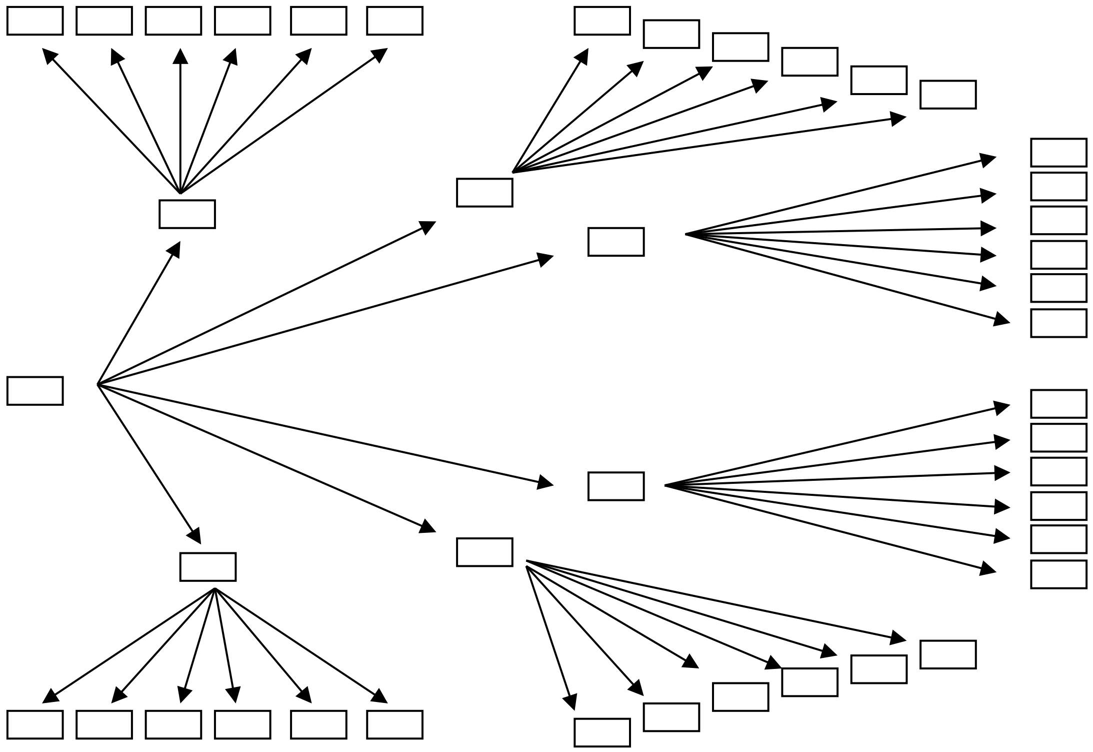


a-si on lance le dé une fois on peut avoir comme résultat 1-2-3-4-5-6
donc 6 possibilités
b-si on lance le dé deux foisl'ensemble des résultats possibles est
{(1,1) , (1,2) , (1,3) , (1,4) , (1,5) , (1,6).....}
donc le nombre des résultats possible est 36
c- donner le nombre des résultats possible si on lance le dé 3 fois

3-formation des nombres

a- on a 6 jetons numérotes de 1 à 6
a1- qu'elle est le nombre des nombres constituer de 3 chiffres qu'on peut former par les jetons
a2- quelle est le nombre des nombres constituer de 6 chiffres qu'on peut former par les jetons

Qu'elle est le nombre des nombre formé de 3 chiffres
Qu'elle est le nombre de téléphone possible au maroc dans le numérotage actuel



Principe multiplicatif (principe du produit)
(Tirages successifs avec ou sans remise)
Si une situation comporte k étapes offrant respectivement $n_1,\ldots,n_k$ possibilités où chacun des nombre ni ne dépend que de l'étape i , alors le nombre total d'issues est : $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$.

Applications

1-dans une caisse on a 3boules blanche et 5 boules noires

a-on tire successivement 3 boules sans remettre la boule tirer (tirage sans remise)

a_1-donner le nombre de tirage possible

a_2-donner le nombre de tirage pour avoir 3 boules blanches

a_3-donner le nombre de tirage pour avoir 3 boules noires

a_4-donner le nombre de tirage pour avoir des boules de même couleurs

b-même question sachant qu'on remet la boule tirée a la caisse avant de tirer la suivante (tirage avec remise)

2-un urne contient 5 boules numérotées de 2 à 6

On tire successivement deux boules si la première boule comporte un nombre paire on la remet pas et on tire la second

Mais si elle comporte un nombre impair on la remet puis on tire le second

a-donner le nombre de tirages possibles

b-donner le nombre de tirage pour avoir exactement deux boules impaires

c-donner le nombre de tirage pour avoir exactement deux boules paires

3-Les arrangements

Introduction

1-dans une salle d'attente d'une clinique il y a 10 chaises et 3 malades

Par combien de façons possible les malades peuvent s'assoir

2-4enfant sont entré dans une salle de révision ou il y a 5 tables

Par combien de façon possible les enfants peuvent s'assoir ((les tables sont individuel)

3-dans une classe il y a 44 élèves de combien de façon on peut choisir 3 élèves l'un après l'autre

definition1

Chaque ordre de p éléments parmi n éléments ($p \leq n$) est appelle arrangement de p élément parmi n

definition2

E est un ensemble de n éléments et p un entier naturel $(1 \leq p < n)$. Un arrangement de p éléments de E est une liste ordonnée de p éléments 2 à 2 distincts choisis parmi les n éléments de E.

Remarque : Soit E={a,b,c,d}. Considérons les arrangements des 4 lettres pris 3 à 3. On a $(a,b,c) \neq (a,b,d)$, $(a,b,c) \neq (b,a,c)$.

Nombre d'arrangements

Définition

soit E un ensemble tel que card(E)=n et p un entier naturel tel que $p \leq n$

on veut choisir de E, p éléments successivement et sans remise alors

pour choisir le premier élément on a n possibilités

pour choisir le deuxième élément on a (n-1) possibilités pour choisir le troisième élément on a (n-2) possibilités

……………………………………………………………

…………………………………………………………

pour choisir le p-ieme élément on a (n-p+1) possibilités

donc d'après le principe du produit on a n (n-1)(n-2)….(n-p+1) possibilités pour choisir de E, p éléments successivement et sans remise

Propriété : Le nombre d'arrangements

Le nombre d'arrangements de p éléments de E est :

$$A_n^p = n(n-1)\ldots\ldots(n-p+1)$$

Et par convention, le nombre d'arrangement de 0 éléments d'un ensemble E est $A_n^0 = 1$

Exemple calculer

A_5^3 , A_6^2 , A_5^1

4- les permutations

a) Définition : E est un ensemble de n éléments. Une permutation des éléments de E est un arrangement des n éléments de E.

Remarque : 2 permutations des éléments de E diffèrent l'une de l'autre par l'ordre des éléments.

Exemple : (a,b,c,d) $\neq$ (b,a,c,d).

Le nombre de permutations, noté P_n, d'un ensemble de n éléments est :

$P_n = A_n^n = n\,(n-1)\ldots 3.2.1.$

b) Factorielle : n est un entier naturel, on désigne par n! (on lit "factorielle n") l'entier défini par :

n! = 1.2.3...(n-1).n pour n > 0.

Par convention 0!= 1.

- On a n ! = n . (n-1) !
- Le nombre de permutation de n éléments est $P_n = n!$
- Autre écriture de A_n^p : $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$
- $A_n^0 = 1$ $A_0^0 = 1$ $A_n^n = n!$

5-les Combinaisons

Définition : E est un ensemble de n éléments et un entier naturel ($p \leq n$). Une combinaison de p éléments des n éléments de E est un sous-ensemble de p éléments de E.

Remarque : 2 combinaisons de n éléments pris p à p diffèrent l'une de l'autre par la nature des éléments.

Exemple : E={a,b,c,d}. Considérons les combinaisons des 4 lettres pris 3 à 3.

On a {a,b,c} ≠ (a,b,d), {a,b,c} = {b,a,c}.

Nombre de combinaisons : C_n^p

On obtient tous les arrangements de n objets pris p à p :

- en formant toutes les combinaisons de p éléments,
- en permutant dans chacun des C_n^p combinaisons, les p éléments qui les constituent, ce qui peut se faire de p! façons.

$A_n^p = C_n^p \cdot p\,!$

Propriété Le nombre de combinaisons

Le nombre de combinaisons de p éléments des n éléments d'un ensemble E est :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$$

Remarque1

$C_n^0 = 1 \qquad C_n^n = 1 \qquad C_n^1 = n$

pour tout n , p ($p \leq n$) $\quad C_n^p = C_n^{n-p} \quad ; \quad C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$

Remarque2

Nombre de façons de tirer p objets parmi n objets ($p \leq n$).

- Tirage simultané : tirer simultanément p objets parmi n objets, c'est choisir une partie de p objets. On ne tient pas compte de l'ordre. Il y a C_n^p cas possibles.
- Tirage successif sans remise : tirer successivement sans remise p objets parmi n objets, c'est choisir un arrangement de p objets. Il y a A_n^p cas possibles.
- Tirage successif avec remise : d'une urne contenant n boules, on en tire une première boule b_1 parmi les n boules, que l'on remet dans l'urne ; puis, on tire une seconde boule b_2 parmi les n boules, que l'on remet dans l'urne ; … puis, on tire une p-ième boule. Les boules $b_1, b_2, \ldots, b_p$ ne sont pas nécessairement distinctes. Il y a n^p cas possibles.

Exemple : *Un boîte contient 6 boules dont 4 noires et 2 rouges.*

On tire au hasard et simultanément 3 boules de la boîte.

1) *Calculez le nombre de cas possibles.*
2) *Calculez le nombre de tirages favorables à l'événement :*

   A : " avoir exactement 1 rouge",

   B : " avoir des boules de même couleur",

   C : " avoir au moins 1 rouge"

3) Reprenez les questions 1- et 2- pour des tirages

- *successifs sans remise,*
- *successifs avec remise.*

application

1-calculer C_4^2 ; C_3^1 ; C_n^1 ;

2-montrer que $C_n^p = C_n^{n-p}$

$$C_n^{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!(p)!} = C_n^p$$

3-montrer que $C_n^{p-1} + C_n^p = C_{n+1}^p \quad / \; 1 \le p \le n$

$$\begin{aligned} C_n^{p-1} + C_n^p &= \frac{n!}{(n-(p-1))!(p-1)!} + \frac{n!}{(n-p)!(p)!} \\ &= \frac{n! \times p}{(n-p+1))!(p)!} + \frac{n! \times (n-p+1)}{(n-p+1)!(p)!} \\ &= \frac{n! \times p}{(n-p+1))!(p)!} + \frac{-pn! + (n+1)!}{(n-p+1)!(p)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{(n+1-p))!(p)!} = C_{n+1}^p \end{aligned}$$

Formule du binôme

1-Tringle de pascal

À la ligne i et à la colonne j $(0 \le j \le i)$ est placé le coefficient binomial C_i^j.

Construction du tringle de Pascal $C_n^{p-1} + C_n^p = C_{n+1}^p$

C_0^0

$C_1^0 \; C_1^1$

$C_2^0 \; C_2^1 \; C_2^2$

$C_3^0 \; C_3^1 \; C_3^1 \; C_3^1$

$C_4^0 \; C_4^1 \; C_4^2 \; C_4^3 \; C_4^4$

$C_5^0 \; C_5^1 \; C_5^2 \; C_5^3 \; C_5^4 \; C_5^5$

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

1											
1	1										
1	2	1									
1	3	3	1								
1	4	6	4	1							
1	5	10	10	5	1						
1	6	15	20	15	6	1					
1	7	21	35	35	21	7	1				
1	8	28	56	70	56	28	8	1			
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1		
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	
1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1

2-formule de binôme

Pour tout réels a et b et pour tout entier naturel non nul n

$$(a+b)^n = C_n^0 b^n + C_n^1 a^1 b^{n-1} + C_n^2 a^2 b^{n-2} + \cdots + C_n^p a^p b^{n-p} + \cdots + C_n^n a^n$$

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p$$

Exemple $(n+1)^5$

App 1- montrer que $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots.. + C_n^n = 2^n$

2- montrer que si card E=n alors $\boxed{cardP(E) = 2^{cardE} = 2^n}$