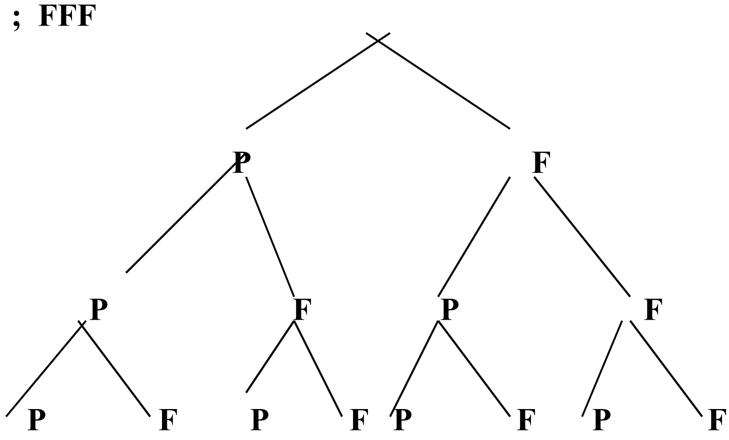
Dénombrement

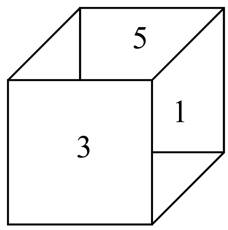
1-Principe multiplicatif (principe du produit)

Introduction

1-lancer d'une pièce de money
a-si on lance une pièce de money une fois ; il est possible d'obtenir l'une des résultats suivant : face (F=face) ou pile (P=pile) et dans ce cas on dit qu'on a deux possibilités
b -si on lance la pièce deux fois on aura les possibilités FF-FP-PF-PP
donc on a 4possibilites
c-si on lance la pièce 3fois on aura les possibilités
PPP ; PPF ; PFP ; FPP
FFP ; FPF ; PFF ; FFF



2-lancer un dé cubique
Un dé cubique a 6 face en général numérote de 1 à 6

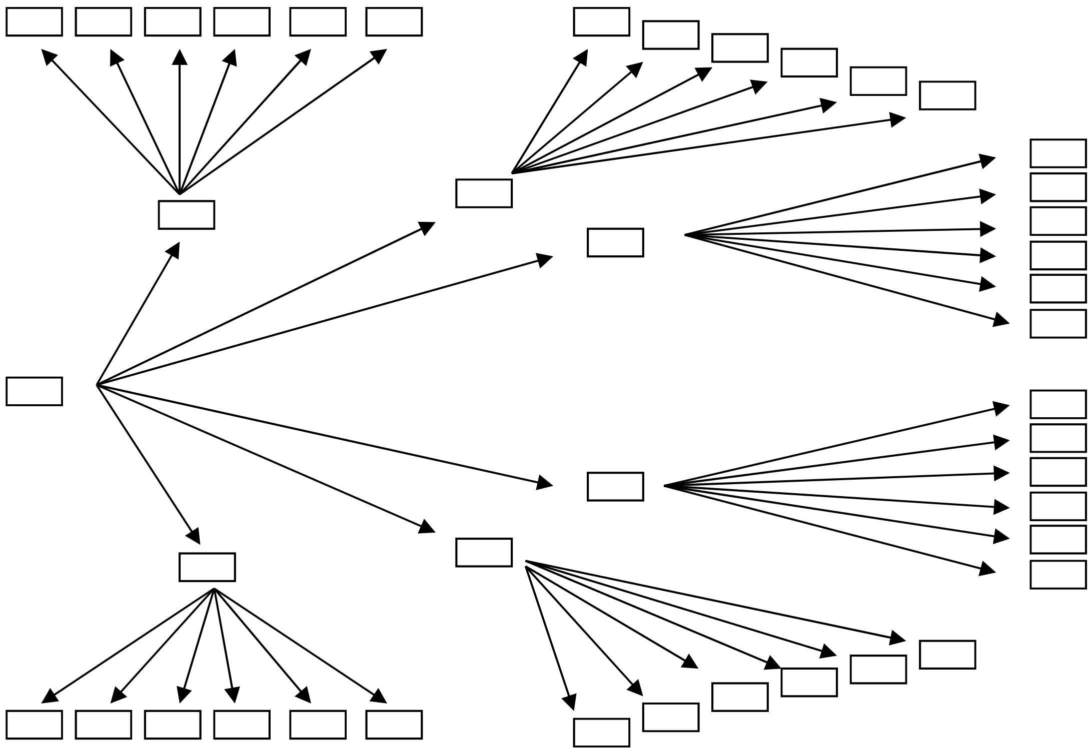


a-si on lance le dé une fois on peut avoir comme résultat 1-2-3-4-5-6
donc 6 possibilités
b-si on lance le dé deux foisl'ensemble des résultats possibles est
{(1,1) , (1,2) , (1,3) , (1,4) , (1,5) , (1,6).....}
donc le nombre des résultats possible est 36
c- donner le nombre des résultats possible si on lance le dé 3 fois

3-formation des nombres

- **a- on a 6 jetons numérotes de 1 à 6**
  - **a1- qu'elle est le nombre des nombres constituer de 3 chiffres qu'on peut former par les jetons**
  - **a2- quelle est le nombre des nombres constituer de 6 chiffres qu'on peut former par les jetons**

Qu'elle est le nombre des nombre formé de 3 chiffres
Qu'elle est le nombre de téléphone possible au maroc dans le numérotage actuel



Principe multiplicatif (principe du produit)
(Tirages successifs avec ou sans remise)
Si une situation comporte k étapes offrant respectivement n1,…,nk possibilités où chacun des nombre ni ne dépend que de l'étape i , alors le nombre total d'issues est : n1 × n2 × …× nk .

Applications
1-dans une caisse on a 3boules blanche et 5 boules noires
a-on tire successivement 3 boules sans remettre la boule tirer (tirage sans remise)
a1-donner le nombre de tirage possible
a2-donner le nombre de tirage pour avoir 3 boules blanches
a3-donner le nombre de tirage pour avoir 3 boules noires
a4-donner le nombre de tirage pour avoir des boules de même couleurs
b-même question sachant qu'on remet la boule tirée a la caisse avant de tirer la suivante (tirage avec remise)
2-un urne contient 5 boules numérotées de 2 à 6
On tire successivement deux boules si la première boule comporte un nombre paire on la remet pas et on tire la second
Mais si elle comporte un nombre impair on la remet puis on tire le second
a-donner le nombre de tirages possibles
b-donner le nombre de tirage pour avoir exactement deux boules impaires
c-donner le nombre de tirage pour avoir exactement deux boules paires

2-Les arrangements

Introduction

1-dans une salle d'attente d'une clinique il y a 10 chaises et 3 malades

Par combien de façons possible les malades peuvent s'assoir

2-4enfant sont entré dans une salle de révision ou il y a 5 tables

Par combien de façon possible les enfants peuvent s'assoir ((les tables sont individuel)

3-dans une classe il y a 44 élèves de combien de façon on peut choisir 3 élèves l'un après l'autre

definition1

Chaque ordre de p éléments parmi n éléments (p≤n) est appelle arrangement de p élément parmi n

definition2

E est un ensemble de n éléments et p un entier naturel $(1 \leq p < n)$. Un arrangement de p éléments de E est une liste ordonnée de p éléments 2 à 2 distincts choisis parmi les n éléments de E.

Remarque : 2 arrangements de p éléments de E diffèrent l'un de l'autre
- **soit par la nature de p éléments choisis,**
- **soit par l'ordre de ces éléments.**

Exemple : Soit E={a,b,c,d}. Considérons les arrangements des 4 lettres pris 3 à 3. On a (a,b,c) $\neq$ (a,b,d), (a,b,c) $\neq$ (b,a,c).

nombre d'arrangements

Définition

Le cardinal d'un ensemble fini E désigne le nombre d'éléments de E.
Ex : E={1,2,5,10}, card(E)=4.

soit E un ensemble tel que card(E)=n et p un entier naturel tel que p≤n

on veut choisir de E, p elements successivement et sans remise alors

pour choisir le premier element on a n possibilites

pour choisir le deuzieme element on a (n-1) possibilites

pour choisir le troisieme element on a (n-2) possibilites

………………………………………………………

…………………………………………………….

pour choisir le p-ieme element on a (n-p+1) possibilites

donc d'apres le principe du produit on a n (n-1)(n-2)….(n-p+1) possibilites pour choisir de E, p elements successivement et sans remise

propriete

Le nombre d'arrangements de p elements parmis n element (p≤n) est n(n-1)……….(n-p+1)
On le note A_n^p

$$A_n^p = n(n-1)......(n-p+1)$$

Exemple calculer

A_5^3 , A_6^2 , A_5^1

2- les permutations

a) Définition : E est un ensemble de n éléments. Une permutation des éléments de E est un arrangement des n éléments de E.

Remarque : 2 permutations des éléments de E diffèrent l'une de l'autre par l'ordre des éléments.
Exemple : (a,b,c,d) $\neq$ (b,a,c,d).

Le nombre de permutations, noté P_n, d'un ensemble de n éléments est :

$P_n = A_n^n$ = n (n-1)...3.2.1.

b) Factorielle : n est un entier naturel, on désigne par n! (on lit "factorielle n") l'entier défini par :

n! = 1.2.3...(n-1).n pour n > 0.
Par convention 0!= 1.

- On a n ! = n . (n-1) !
- Le nombre de permutation de n éléments est P_n = n!
- Autre écriture de A_n^p : $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

- $A_n^0 = 1$ $A_0^0 = 1$ $A_n^n = n!$

3-Combinaison

Définition : E est un ensemble de n éléments et un entier naturel (p≤n). Une combinaison de p éléments des n éléments de E est un sous-ensemble de p éléments de E.

Remarque : 2 combinaisons de n éléments pris p à p diffèrent l'une de l'autre par la nature des éléments.
Exemple : E={a,b,c,d}. Considérons les combinaisons des 4 lettres pris 3 à 3. On a {a,b,c} $\neq$ (a,b,d), {a,b,c} = {b,a,c}.

Nombre de combinaisons : C_n^p

On obtient tous les arrangements de n objets pris p à p :

- **en formant toutes les combinaisons de p éléments,**
- **en permutant dans chacun des C_n^p combinaisons, les p éléments qui les constituent, ce qui peut se faire de p! façons.**

$A_n^p = C_n^p \cdot p\,!$

Le nombre de combinaisons de p éléments des n éléments d'un ensemble E est :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$$

c) Propriétés

$C_n^0 = 1 \qquad C_n^n = 1 \qquad C_n^1 = n$

pour tout n , p (p ≤ n) $\quad C_n^p = C_n^{n-p} \quad ; \quad C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$

remarque

Nombre de façons de tirer p objets parmi n objets (p ≤ n).

- **Tirage simultané : tirer simultanément p objets parmi n objets, c'est choisir une partie de p objets. On ne tient pas compte de l'ordre. Il y a** C_n^p **cas possibles.**
- **Tirage successif sans remise : tirer successivement sans remise p objets parmi n objets, c'est choisir un arrangement de p objets. Il y a** A_n^p **cas possibles.**
- **Tirage successif avec remise : d'une urne contenant n boules, on en tire une première boule** b_1 **parmi les n boules, que l'on remet dans l'urne ; puis, on tire une seconde boule** b_2 **parmi les n boules, que l'on remet dans l'urne ; ... puis, on tire une p-ième boule. Les boules** $b_1, b_2, \ldots, b_p$ **ne sont pas nécessairement distinctes. Il y a** n^p **cas possibles.**

Exemple : ***Un boîte contient 6 boules dont 4 noires et 2 rouges.***

On tire au hasard et simultanément 3 boules de la boîte.

1) Calculez le nombre de cas possibles.

2) Calculez le nombre de tirages favorables à l'événement :

A : " avoir exactement 1 rouge",

B : " avoir des boules de même couleur",

C : " avoir au moins 1 rouge"

3) Reprenez les questions 1- et 2- pour des tirages

- ***successifs sans remise,***
- ***successifs avec remise.***

application

1-calculer $C_4^2 \;;\; C_3^1 \;;\; C_n^1 \;;\; C_n^0$

2-montrer que $C_n^p = C_n^{n-p}$

3-montrer que $C_n^{p-1} + C_n^p = C_{n+1}^p \quad / \; 1 \le p \le n$

4-triangle de pascal

5-formule de binome $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p$

Exemple $(n+1)^5$

App 1- montrer que $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$

2- montrer que si card E=n alors $\boxed{cardP(E) = 2^{cardE} = 2^n}$