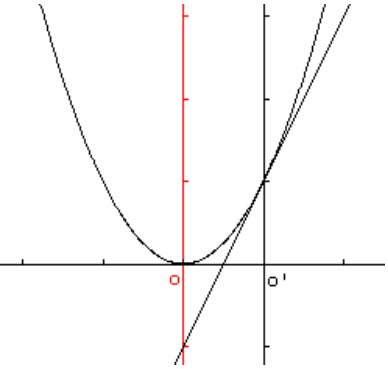
Fonctions dérivées 1sm2

I. APPROXIMATION AFFINE D'UNE FONCTION.

Rappel : Une fonction affine est une fonction définie sur ℝ de la forme : $x \mapsto ax+b$ où a et b sont des nombres réels.

1. Approximation affine de la fonction carré au voisinage de 1 :



Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x)=(1+x)^2$

On a $(1+x)^2 = 1+2x+x^2$

Si $|x|$ est proche de 0 alors x^2 est négligeable devant 2x.

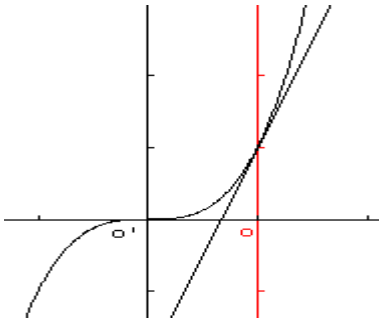
Aussi, pour des valeurs de x proche de 0, 1+2x est une approximation affine de $(1+x)^2$.

L'erreur commise est égale à x^2.

Si $|x| \leq 10^{-2}$, alors l'erreur commise est inférieure à 10^{-4}.

$1.001^2 \approx 1+2\times 0.001$ Donc $1.001^2 \approx 1.002$

2. Approximation affine de la fonction cube au voisinage de 1 :



Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x)=(1+x)^3$

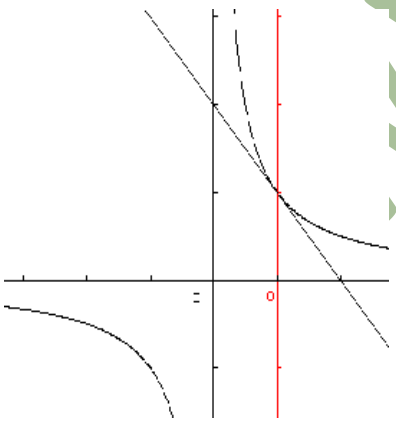
On a $(1+x)^3 = 1+3x+3x^2+x^3$

Si $|x|$ est proche de 0 alors $3x^2$ et x^3 sont négligeables devant 3x.

Aussi, pour des valeurs de x proche de 0, 1+3x est une approximation affine de $(1+x)^3$.

L'erreur commise est égale à $3x^2+x^3$.

3. Approximation affine de la fonction inverse au voisinage de 1 :



Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$

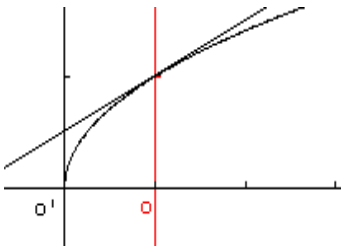
On a $\dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1+x-x(1+x)+x^2}{1+x} = 1-x+\dfrac{x^2}{1+x}$

Si $|x|$ est proche de 0 alors $\dfrac{x^2}{1+x}$ est négligeable devant x.

Aussi, pour des valeurs de x proche de 0, 1-x est une approximation affine de $\dfrac{1}{1+x}$.

L'erreur commise est égale à $\dfrac{x^2}{1+x}$.

4. Approximation affine de la fonction racine carrée au voisinage de 1 :



Soit f la fonction définie sur ℝ+ par $f(x)=\sqrt{1+x}$

On a, $\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^2 = 1+x+\dfrac{x^2}{4}$

Si $|x|$ est proche de 0 alors $\dfrac{x^2}{4}$ est négligeable devant x.

www.0et1.com

Ainsi, pour des valeurs de x proche de 0, $1+\frac{x}{2}$ est une approximation affine de $\sqrt{1+x}$. L'erreur commise est égale à $\frac{x^2}{4}$.

II. DERIVATION EN UN POINT.

1. Taux de variation et nombre dérivé.

Définition : Soit *f* une fonction définie au voisinage de x_0. On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère (O,,).
Le coefficient directeur de la droite passant par les points de la courbe $\mathcal{C}$, d'abscisses respectives x_0 et x_0+h est le nombre $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.
Ce nombre est appelé **taux de variation de f entre x_0 et x_0+h.**

<u>Théorème :</u> Soit le fonction *f* définie sur un intervalle ouvert contenant x_0. Alors *f* est dérivable en x_0, si et seulement si $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=a\in\mathbb{R}$. Le nombre reel a est appeler nombre dérivé *de f en* x_0

2. Définition et notion de tangente.

Définition1 : Soit *f* la fonction définie sur un intervalle I ouvert contenant x_0. On dit que *f* est dérivable en x_0 si et seulement si il existe un réel *a* et une fonction φ tels que :

$$f(x_0+h)=f(x_0)+ah+h\,\varphi(h),\text{ avec }\lim_{h\to 0}\varphi(h)=0,$$

et cela pour tout *h* tel que x_0+h appartient à I.

Exemple : soit *f* la fonction définie sur ℝ par $f(x)=x^3$. On prend $x_0=2$.
On obtient $f(2+h)-f(2)=12h+6h^2+h^3=12h+(6h^2+h^3)$.
On peut alors écrire $f(2+h)=f(2)+12h+h\varphi(h)$, avec $\varphi(h)=6h+h^2$.
Comme $\lim_{h\to 0}\varphi(h)=0$, la fonction *f* est dérivable en 2, et 12 est le nombre dérivé de *f* en 2.
On écrit alors $f'(2)=12$.

3. Dérivabilité d'une fonction en un point. Nombre dérivé

1 - la derivabilite en un point

soit f une fonction dont le domaine de définition D_f contient un intervalle ouvert de centre x_0

on dit que la fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l\in\mathbb{R}$$

et on écrit $f'(x_0)=l$

le nombre $f'(x_0)$ s'appelle le nombre dérivée de la fonction f en x_0

2 - la derivabilite a droite en un point

soit f une fonction dont le domaine de définition D_f contient un intervalle de la forme $[x_0\ ,\ x_0+\alpha[$ tel que $\alpha\succ 0$

www.0et1.com

on dit que la fonction f est dérivable a droite en x_0 si et seulement si.

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x_0 \prec x}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in \mathbb{R}$$

et on ecrit $f'_d(x_0) = l$

le nombre $f'_d(x_0)$ **s' appelle le nombre dérivée a droite de la fonction** f **en** x_0.

2 - la derivabilite a gauche en un point

soit f **une fonction dont le domaine de définition** D_f **contient un intervalle de la forme** $]x_0 - \alpha \, , \, x_0]$ **tel que** $\alpha \succ 0$

on dit que la fonction f est dérivable a gauche en x_0 si et seulement si.

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x_0 \succ x}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in \mathbb{R}$$

et on ecrit $f'_g(x_0) = l$

le nombre $f'_g(x_0)$ **s'appelle le nombre dérivée à gauche de la fonction** f **en** x_0.

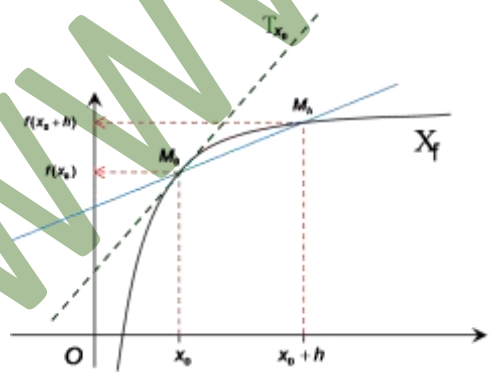
Propriété

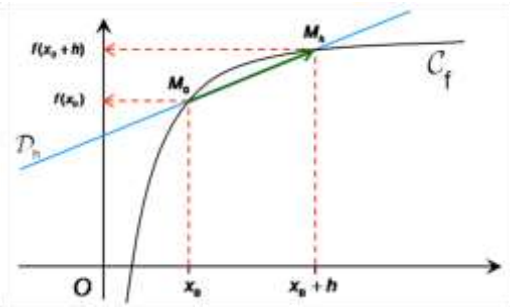
on dit que la fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si elle est dérivable en à droite et à gauche en x_0 et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$

1-interpretation géométrique

soit (ℓ_f) **la courbe représentatif de la fonction** f **dans le plan rapporter au repère orthonormée**

On considère les points $M_h(x_0 + h, f(x_0 + h))$. $M_0(x_0 \, , \, f(x_0))$





On a $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ **est la pente de la droite** $(M_h M_0)$

Quand le point M_h se rapproche du point M_0

la droite $(M_h M_0)$ **se rapproche de la droite** (Δ)

www.0et1.com

donc la pente de (Δ) **est** $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$

donc l'équation de la tangente (Δ) **est** $y = f'(x_0)x + p$

on a $M_0(x_0 , f(x_0)) \in (\Delta)$

donc $f(x_0) = f'(x_0)\, x_0 + p$

donc $p = f(x_0) - f'(x_0)x_0$

d ou $y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0$

donc

$\boxed{y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)}$ **est l'équation de la tangente a** (ℓ_f) **au point** $M_0(x_0 , f(x_0))$

https://youtu.be/UmT0Gov6yyE?list=PLVUDmbpupCar85S0V4y-Flv426LmtZ2YZ

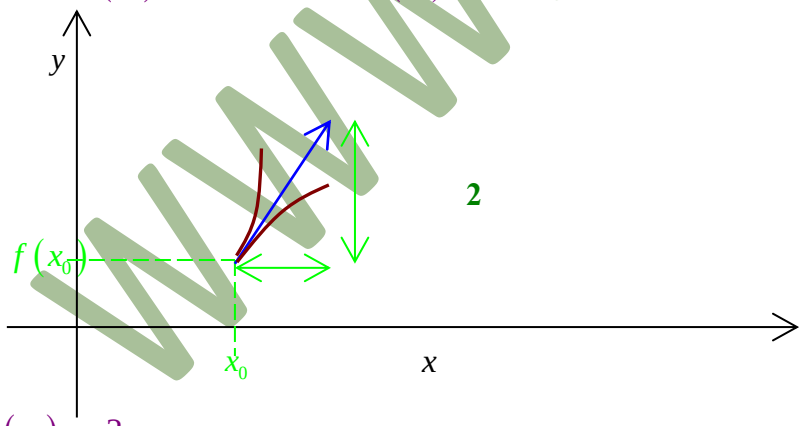
la demi tangente à (ℓ_f)

si f **est dérivable en** x_0 **a droite l équation de la demi tangente est** $\begin{cases} y = f'_d(x_0)(x-x_0) + f(x_0) \\ x \geq x_0 \end{cases}$

si f **est dérivable en** x_0 **a gauche l équation de la demi tangente est** $\begin{cases} y = f'_g(x_0)(x-x_0) + f(x_0) \\ x \leq x_0 \end{cases}$

exemple1

1- $f'_d(x_0) = 2$ و $f(x_0) = 1$

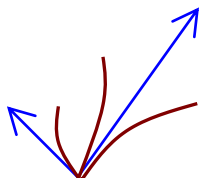


2- $f'_d(x_0) = -2$

$f'_g(x_0) = \dfrac{3}{2}$

$f'_g(x_0) = -2$

$f'_g(x_0) = -1$; $f'_d(x_0) = 2$



www.0et1.com

M_0

Applications : étudier la dérivabilité de f en x_0 dans las cas suivants

$1-\ f(x)=\sqrt{x}\ ;\ x_0=1$

$$on\,a:\ \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{1}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$$

Donc f est dérivable en 1 et le nombre dérivé en 1 est f'(1)=$1/2$

$2-\ f(x)=\dfrac{1}{x+1}\ ;\ x_0=0$

$$on\,a:\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+1}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-x-1}{x(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{(1+x)}=-1$$

Donc f est dérivable en 0 et le nombre dérivé en 0 est f'(0)=-1

$3-\ f(x)=(x+1)\sin x\ ;\ x_0=0$

$$on\,a:\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)\sin x}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}(x+1)\frac{\sin x}{x}=1\in\mathbb{R}$$

Donc f est dérivable en 0 et le nombre dérivé en 0 est f'(0)=1

$4-\ f(x)=|x|\ ;\ x_0=0$

$$on\,a:\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1\in\mathbb{R}\ et\ \lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1\in\mathbb{R}$$

$$donc\ f_d'(0)=1\ et\ f_g'(0)=-1$$

$$donc\ f_d'(0)\neq f_g'(0)$$

Donc f n'est pas dérivable en 0

Pour lire graphiquement un nombre dérivé, on lit le coefficient directeur de la tangente.

En pratique

www.0et1.com

On ne travaille pas du tout avec la courbe ; on peut l'effacer.
On oublie la courbe.
On ne garde que la tangente.

On applique la méthode qui permet de déterminer le coefficient directeur d'une droite.
On utilise la technique du quadrillage : on prend deux points de la droite qui sont aussi situés sur le quadrillage.
On effectue un déplacement qui va d'un point à l'autre.

Le coefficient directeur est égal à $\dfrac{\text{déplacement vertical}}{\text{déplacement horizontal}}$ en tenant compte des signes et des unités.

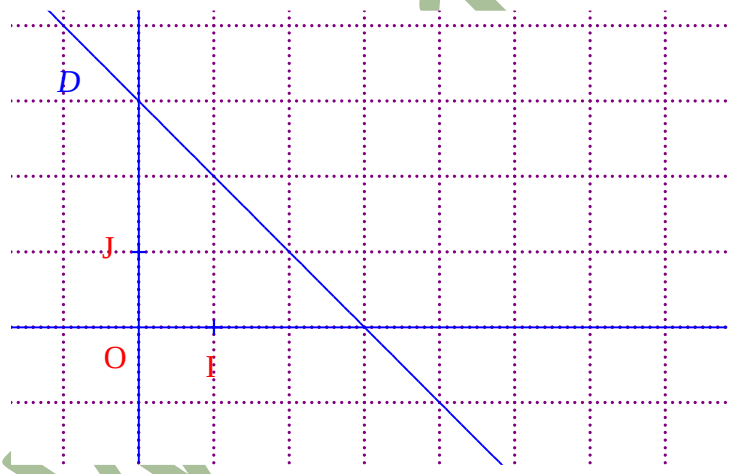
En général, on se déplace vers la droite.

On se déplace de 1 si ça tombe « pile ».

Si ça ne tombe pas « pile », on se déplace de plusieurs unités.

Le coefficient directeur dépend de l'inclinaison de la droite.

Exemple :



- 1er trajet

+1 (on va vers la droite)

– 1 (on descend vers le bas)

On calcule le quotient $\dfrac{\text{déplacement vertical}}{\text{déplacement horizontal}} = \dfrac{-1}{+1} = -1$.

- 2e trajet

+1
(on monte)

– 1 (on va vers la gauche)

www.1 com

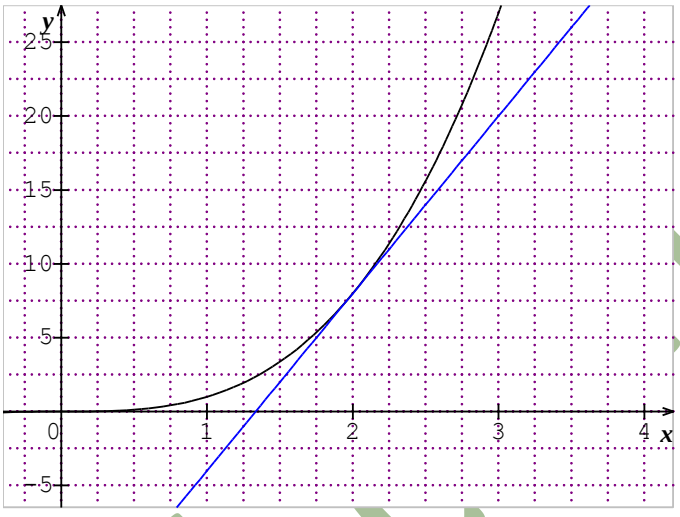
On calcule le quotient $\dfrac{\text{déplacement vertical}}{\text{déplacement horizontal}} = \dfrac{+1}{-1} = -1$.

On trouve heureusement le même résultat qu'avec le 1er trajet.

Remarque : on peut commencer le déplacement à partir du point de contact ou de n'importe quel point de la droite.

exemple1

Exemple : on reprend l'exemple précédent. Comme $f(2) = 8$, la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 2 a pour équation : $y = 12(x-2) + 8$. L'équation réduite de la tangente est $y = 12x - 16$.



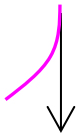
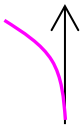
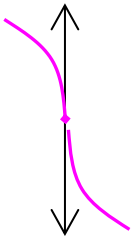
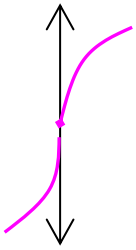
Théorème : Soit f une fonction dérivable en x_0.la courbe représentative de f admet au point d'abscisse A(x_0, $f(x_0)$) une tangente dont une équation est :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Demi tangente vertical(parallèle à l'axe des abscisses)

si on a $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$ **Ou** $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$

Alors (ℓ_f) **admet une demi tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d abscisse** x_0

$\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ 	$\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$ 	$\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$ 	$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ 

III. FONCTION DERIVEE.

1. Définition.

La fonction f est dite dérivable sur I lorsqu'elle est dérivable en tout point a de I. La fonction qui à tout x de I associe le nombre dérivé de f en x: $x \mapsto f'(x)$ est appelée fonction dérivée de f. On la note f'.

2. Dérivées des fonctions usuelles.

Exemple1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k(cons\tan te)$.

Calculons le nombre dérivé de la fonction f en un nombre réel quelconque a.

Pour $h \neq 0$: $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{k-k}{h} = 0$

donc : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = 0$

On a donc défini sur $\mathbb{R}$ une fonction, notée f' dont l'expression est $f'(x) = 0$.

Exemple2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$.

Calculons le nombre dérivé de la fonction f en un nombre réel quelconque a.

Pour $h \neq 0$: $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{(a+h)-a}{h} = \dfrac{h}{h} = 1$

Or : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = 1$

On a donc défini sur $\mathbb{R}$ une fonction, notée f' dont l'expression est $f'(x) = 1$.

Exemple3

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

Calculons le nombre dérivé de la fonction f en un nombre réel quelconque a.

Pour $h \neq 0$: $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{(a+h)^2-a^2}{h} = \dfrac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = 2a+h$

Or : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 2a+h = 2a$

Pour tout nombre a, on associe le nombre dérivé de la fonction f égal à $2a$.

On a donc défini sur $\mathbb{R}$ une fonction, notée f' dont l'expression est $f'(x) = 2x$.

Exemple4

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ \{0} par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Pour $h \neq 0$ et $h \neq -a$: $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{\dfrac{1}{a+h} - \dfrac{1}{a}}{h} = \dfrac{\dfrac{a-a-h}{a(a+h)}}{h} = -\dfrac{1}{a(a+h)}$

Or : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} -\dfrac{1}{a(a+h)} = -\dfrac{1}{a^2}$

Pour tout nombre a, on associe le nombre dérivé de la fonction f égal à $-\dfrac{1}{a^2}$.

www.0et1.com

Ainsi, pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, on a : $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Exemple5 $f(x) = x^3$

Exemple6 $f(x) = x^n$ **par recurrence**

Exemple7 $f(x) = \sqrt{x}$

Exemple8 $f(x) = \sin x$

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x$.

$$on\,a\ pour\ h \neq 0;\ \frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h} = \frac{\sin(a)\cos(\mathrm{h})+\cos(a)\sin(\mathrm{h})-\sin(a)}{h}$$

$$= \cos(a)\frac{\sin(\mathrm{h})}{h} + \sin(a)\frac{\cos(h)-1}{h}$$

$$= \cos(a)\frac{\sin(\mathrm{h})}{h} - \sin(a)\frac{1-\cos(h)}{h^2}h$$

$$donc\ \lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\cos(a)\frac{\sin(h)}{h} - \sin(a)\frac{1-\cos(h)}{h^2}h$$

$$= \cos a$$

Pour tout nombre a, on associe le nombre dérivé de la fonction f égal à cos(a).
Ainsi, pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f'(x) = \cos(x)$.

Exemple9 $f(x) = \cos x$

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x$.

$$on\,a\ pour\ h \neq 0;\ \frac{\cos(a+h)-\cos(a)}{h} = \frac{\cos(a)\cos(\mathrm{h})-\sin(a)\sin(\mathrm{h})-\cos(a)}{h}$$

$$= -\sin(a)\frac{\sin(\mathrm{h})}{h} + \cos(a)\frac{\cos(h)-1}{h}$$

$$= -\sin(a)\frac{\sin(\mathrm{h})}{h} - \cos(a)\frac{1-\cos(h)}{h^2}h$$

$$donc\ \lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h} = \lim_{h\to 0} -\sin(a)\frac{\sin(h)}{h} - \cos(a)\frac{1-\cos(h)}{h^2}h$$

$$= -\sin(a)$$

Pour tout nombre a, on associe le nombre dérivé de la fonction f égal à -sin(a).
Ainsi, pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f'(x) = -\sin(x)$.

Fonction f définie sur :	**Par :**	**Dérivable sur :**	**Fonction dérivée *f'* définie par :**
IR	*f(x) =k (constante)*	IR	*f'(x) = 0*

www.0et1.com

ℝ	$f(x) = x$	ℝ	$F'(x) = 1$
ℝ	$f(x) = x^n$ (n entier naturel strictement positif)	ℝ	$f'(x) = n\,x^{n-1}$
$]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$	$f(x)=\frac{1}{x}$	$]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$	$f'(x)= -\frac{1}{x^2}$
$]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$	$f(x)=\frac{1}{x^n}$ (n entier naturel strictement positif).	$]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$
$[0\,;+\infty[$	$f(x)=\sqrt{x}$	$]0\,;+\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
ℝ	$f(x)= \sin x$	ℝ	$f'(x)=\cos x$
ℝ	$f(x) = \cos x$	ℝ	$f'(x) = -\sin x$

IV. OPERATIONS SUR LES FONCTIONS DERIVABLES.

1. Somme de deux fonctions.

Théorème : Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un même intervalle I de ℝ, alors $u + v$ est dérivable sur I et $(u+v)' = u' + v'$.

Démonstration

- On veut démontrer que : $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h} = u'(a)+v'(a)$.

$\frac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h} = \frac{u(a+h)+v(a+h)-u(a)-v(a)}{h} = \frac{u(a+h)-u(a)}{h}+\frac{v(a+h)-v(a)}{h}$ Comme u et v sont dérivables sur I, on a :

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{u(a+h)-u(a)}{h} = u'(a)$ et $\lim\limits_{h\to 0}\frac{v(a+h)-v(a)}{h} = v'(a)$

donc : $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h} = u'(a)+v'(a)$.

Exemple : dériver la fonction $f(x) = x^4 + \sin x$.

2. Produits de deux fonctions

Théorème : Si u est une fonction dérivable sur I de ℝ et k une constante réel , alors ku est dérivable sur I et $(ku)' = k\,u'$.

Théorème : toute fonction polynôme est dérivable sur ℝ.

Exemple : Dériver la fonction $f(x) = 5x^4 - 3x^2 + 6x - 7$.

Théorème : Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un même intervalle I, alors uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.

Démonstration……..

www.0et1.com

Théorème : Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I de ℝ, alors u^2 est dérivable sur I et $(u^2)' = 2u'u$.

3. Inverse d'une fonction.

Théorème : Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I de ℝ, et si pour tout x de I, $u(x)\neq 0$, alors $\frac{1}{u}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$.

Démonstration

- $$\frac{\left(\frac{1}{u}\right)(a+h)-\left(\frac{1}{u}\right)(a)}{h} = \frac{\frac{1}{u(a+h)}-\frac{1}{u(a)}}{h}$$
$$= \frac{u(a)-u(a+h)}{hu(a)u(a+h)} = -\frac{u(a+h)-u(a)}{h}\times\frac{1}{u(a)u(a+h)}$$

donc : $$\lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{1}{u}\right)(a+h)-\left(\frac{1}{u}\right)(a)}{h} = -u'(a)\times\frac{1}{u(a)u(a)} = -\frac{u'(a)}{(u(a))^2}.$$

Exemple : Dériver la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

4. Quotient de deux fonctions.

Théorème : Si u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I de ℝ, et si pour tout x de I, $u(x)\neq 0$, alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$.

Démonstration

Théorème : toute fonction rationnelle est dérivable sur tout intervalle de son ensemble de définition.

Exemple : Dériver la fonction f définie sur]- 2 ; +∞[par $f(x) = \frac{2x-3}{x+2}$.

Exemple2 : f(x)=tanx

5. Fonction composée avec une fonction affine.

Théorème : Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I de ℝ, et si pour tout x d'un intervalle J, $ax+b$ appartient à I, alors la fonction $g : x \mapsto f(ax+b)$ est dérivable sur J et $g'(x) = a\times f'(ax+b)$.

Exemple : soit la fonction $g(x) = f(x) = \sqrt{3x-1}$. Alors g est dérivable sur $\left]\frac{1}{3},+\infty\right[$,

g est la composée de $f(x) = \sqrt{x}$ avec la fonction affine $3x-1$.

On peut donc calculer la dérivée de g, on a $g'(x) = 3\times\frac{1}{2\sqrt{3x-1}} = \frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$.

Résumé : Opérations sur les fonctions dérivées

Si u et v sont 2 fonctions dérivables sur un intervalle I, alors on admet les résultats suivants :

www.0et1.com

$(u+v)' = u' + v'$,

$(ku)' = ku'$ où k est une constante réelle,

$(uv)' = u'v + uv'$,

$(u^2)' = 2u'u$,

$(u^n)' = nu'u^{n-1}$, où n est un entier > 1,

$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$, où $v(x) \neq 0$ pour tout x de I,

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, où $v(x) \neq 0$ pour tout x de I,

Démonstration par récurrence de $(u^n)' = nu'u^{n-1}$, où n est un entier > 1,

V. Utilisation des dérivées.

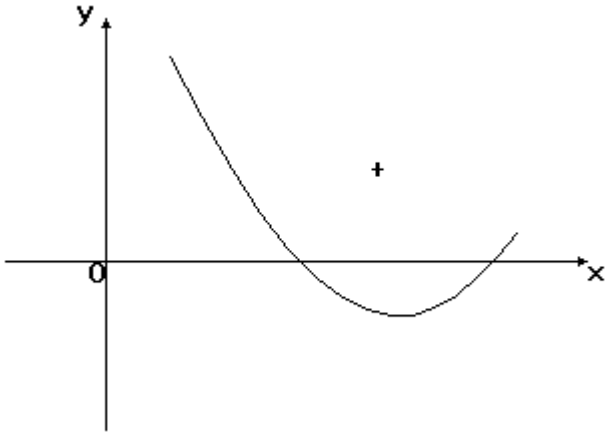
a. Utilisation de la dérivée première

La dérivée première sert essentiellement à :

- connaître le sens de variation de la fonction :
  - si $f'(x)>0$ sur un intervalle I alors f est croissante sur I,
  - si $f'(x)<0$ sur un intervalle I alors f est décroissante sur I,
  - si f' s'annule et change de signe en x_0, alors f a un extremum en x_0.

b. Utilisation de la dérivée seconde

La dérivée seconde permet de connaître le sens de la concavité d'une courbe :



Courbe dont la concavité est orientée vers les ordonnées positives

$f''(x)$ est positif pour tout x de l'intervalle.

www.0et1.com

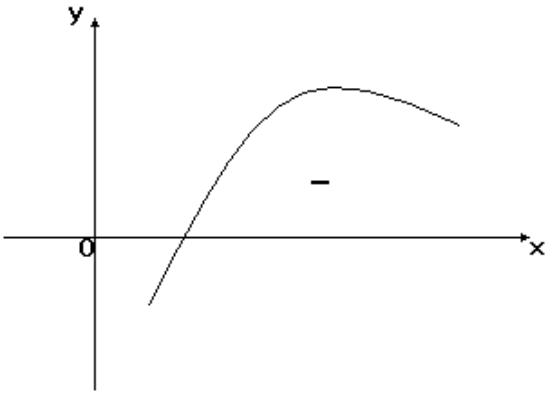


Fig.2 *Courbe dont la concavité est orientée vers les ordonnées négatives*

$f''(x)$ est négatif pour tout x de l'intervalle.

Si la dérivée seconde s'annule et change de signe, on observe alors un changement de l'orientation de la concavité et on a un *point d'inflexion* comme sur ce schéma :

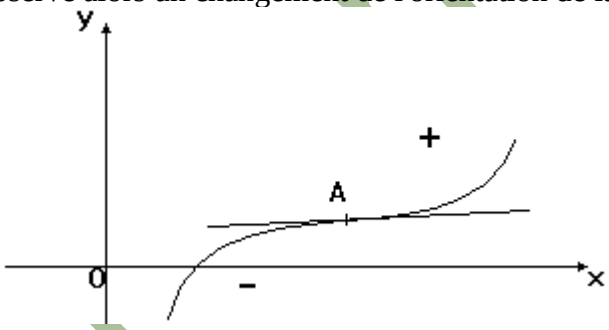


Fig.3 *Courbe présentant un point d'inflexion en A. La tangente en A traverse la courbe.*

<u>Remarque</u> : Si la dérivée première f' s'annule en x_0 sans qu'elle change de signe , On a donc un point d'inflexion d'abscisse x_0

Et si la dérivée première s'annule en x_0 en changeant de signe en x_0.alars la fonction f admet un extremum en x_0

Exemple

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2 - 3x + 4$ admet-elle un extremum sur $\mathbb{R}$?

Pour tout x réel, on a : $f'(x) = 10x - 3$

Et : $f'(x) = 0$ pour $x = \frac{3}{10}$.

On dresse alors le tableau de variations :

x	$-\infty$		$\frac{3}{10}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
f		↘	$\frac{71}{20}$	↗	

En effet : $f\left(\frac{3}{10}\right) = \frac{71}{20}$

La fonction f admet donc un minimum égal à $\frac{71}{20}$ en $x = \frac{3}{10}$

www.0et1.m