# LES SUITES NUMERIQUES

## 1/definitions

### 1) Définition d'une suite numérique

Exemple d'introduction :
On considère une liste de nombres formée par tous les nombres impairs rangés dans l'ordre croissant : 1, 3, 5, 7, …
On note ($u_n$) l'ensemble des "éléments" de cette suite de nombres tel que :
$u_0 = 1$, $u_1 = 3$, $u_2 = 5$, $u_3 = 7$, …
On a ainsi défini une suite numérique.
On peut lui associer une fonction définie sur $I$ une partie de $\mathbb{N}$ par

$$\begin{aligned} u : I &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto u(n) = u_n \end{aligned}$$

Définitions : Une suite numérique $(u_n)_{n\in I}$ est une liste ordonnée de nombres réels telle qu'à tout entier $n$ on associe un nombre réel noté $u_n$.
$u_n$ est appelé le terme de rang $n$ de cette suite (ou d'indice $n$). ou le terme generale de la suite

### 2) Générer une suite numérique par une formule explicite

Exemple :
- Pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, on donne : $u_n = 2n$ qui définit la suite des nombres pairs.

Les premiers termes de cette suite sont donc :
$u_0 = 2 \times 0 = 0$,
$u_1 = 2 \times 1 = 2$,
$u_2 = 2 \times 2 = 4$,
$u_3 = 2 \times 3 = 6$.

Lorsqu'on génère une suite par une formule explicite, chaque terme de la suite est exprimé en fonction de $n$ et indépendamment des termes précédents.

### 3) Générer une suite numérique par une relation de récurrence

Exemple :
- On définit la suite ($v_n$) par :

$v_0 = 3$ et pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $v_{n+1} = 4v_n - 6$
Les premiers termes de cette suite sont donc :
$v_0 = 3$,
$v_1 = 4v_0 - 6 = 4 \times 3 - 6 = 6$,
$v_2 = 4v_1 - 6 = 4 \times 6 - 6 = 18$,
$v_3 = 4v_2 - 6 = 4 \times 18 - 6 = 66$.

Contrairement à une suite définie par une formule explicite, il n'est pas possible, dans l'état, de calculer par exemple $v_{13}$ sans connaître $v_{12}$.

Lorsqu'on génère une suite par une relation de récurrence, chaque terme de la suite s'obtient à partir d'un ou plusieurs des termes précédents.

### 4) Représentation graphique d'une suite

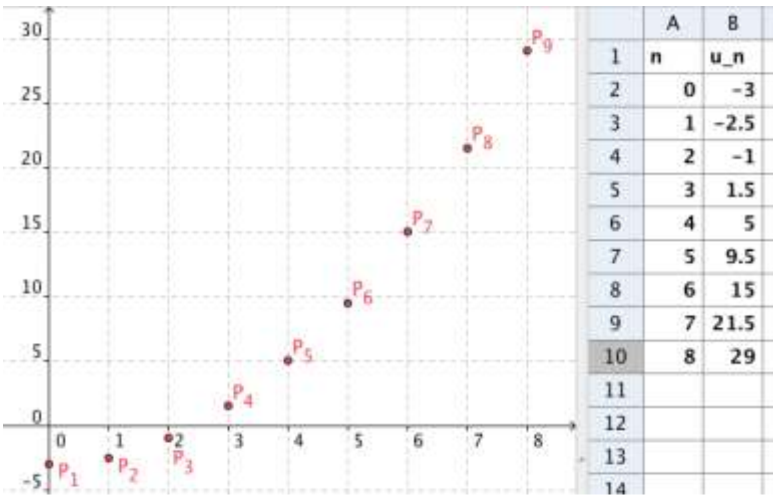
Dans un repère du plan, on représente une suite par un nuage de points de coordonnées $(n;u_n)$.

Exemple :

Pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, on donne : $u_n = \frac{n^2}{2} - 3$.

On construit le tableau de valeurs avec les premiers termes de la suite :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_n$ | -3 | -2,5 | -1 | 1,5 | 5 | 9,5 | 15 | 21,5 | 29 |




## *2/suites bornées*

Une suite est dite ***majorée*** s'il existe un réel $M$ supérieure à tous les termes de la suite, c'est à dire :

$\boxed{u_n \leq M \text{ pour tout entier } n.}$

la suite $(u_n)_{n\in I}$ est dite ***majorée*** s'il existe un réel $M$ tel que $\forall n \in I \quad ; \quad u_n \leq M$

En particulier, toute suite décroissante est majorée par son premier terme.

Une suite est dite ***minorée*** s'il existe un réel $m$ inférieur à tous les termes de la suite, c'est à dire :

$\boxed{u_n \geq m \text{ pour tout entier } n.}$

la suite $(u_n)_{n\in I}$ est dite ***minorée*** s'il existe un réel $m$ tel que $\forall n \in I \quad ; \quad m \leq u_n$

En particulier, toute suite croissante est minorée par son premier terme.

Une suite est dite ***bornée*** si elle est à la fois majorée et minorée.

Une suite arithmétique n'est jamais bornée (sauf le cas très particulier de la suite constante, de raison nulle). Une suite géométrique est bornée si et seulement si la valeur absolue de sa raison est inférieure à 1.

Quand une suite est définie par une formule explicite $u_n = f(n)$, le tableau de variations de $f$ suffit la plupart du temps pour conclure sur les bornes de la suite (si la fonction est majorée la suite est majorée, et si la fonction est minorée la suite est minorée, la réciproque étant fausse). Cette méthode est de nouveau inapplicable aux suites récurrentes.

Pour le cas général (et donc pour les suites récurrentes) il faut raisonner directement sur l'inégalité $u_n \leq M$ ( ou $u_n \geq m$) et démontrer que cette inégalité est vraie pour tout entier $n$.

Exemples :

1) Soit la suite définie pour tout $n \geq 1$ par $u_n = \frac{2n+1}{3n-1}$.
2) Démontrer que $(u_n)$ est minorée par $\frac{2}{3}$.
3) (Etude du signe de $u_n - \frac{2}{3}$ )

4) Soit la suite définie pour tout n ≥ 0 par $u_0$ =1 et $u_n = \frac{1}{4}u_n + 3$. Démontrer par récurrence que $u_n \leq 4$.

## 3/suites monotones

Une suite est dite ***croissante*** quand chaque terme est supérieur au précédent, c'est à dire
$u_1 \geq u_0$, $u_2 \geq u_1$, $u_3 \geq u_2$, etc……..

de façon générale, une suite est croissante si et seulement si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout entier $n$.

la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est dite ***croissante*** si et seulement si $\forall n \geq n_0 \quad ; \quad u_{n+1} \succeq u_n$

Une suite arithmétique de raison positive est toujours croissante.

Une suite est dite ***décroissante*** quand chaque terme est inférieur au précédent, c'est à dire
$u_1 \leq u_0$, $u_2 \leq u_1$, $u_3 \leq u_2$, etc……..

Une suite arithmétique de raison négative est toujours décroissante.

de façon générale, une suite est décroissante si et seulement si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout entier $n$.

la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est dite ***décroissante*** si et seulement si $\forall n \geq n_0 \quad ; \quad u_{n+1} \preceq u_n$

Une suite est dite ***monotone*** si elle est, soit croissante, soit décroissante.

Une suite géométrique de raison positive est toujours monotone, une suite géométrique de raison négative ne l'est jamais (sauf le cas très particulier de la suite nulle).

Si la suite est définie par une formule explicite $u_n = f(n)$, elle a même monotonie que la fonction $f$.
On peut donc, dans ce cas, étudier les variations de $f$ puis conclure directement pour la suite.

Cette méthode est inapplicable aux suites récurrentes.

De façon générale, pour étudier le sens de variations d'une suite, on calcule
la différence $u_{n+1} - u_n$ et on en cherche le signe.

Si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ la suite est croissante.
Si $u_{n+1} - u_n \leq 0$ la suite est décroissante.

Cas particulier

1cas Soit $f$ une fonction définie sur $D$ tel que $(I \in D)$

Soit la suite $(u_n)_{n \in I}$ est définie par $\forall n \in I \quad ; \quad u_n = f(n)$

On a $\forall n \in I \quad ; \quad u_{n+1} - u_n = f(n+1) - f(n)$

Donc si $f$ est croissante alors $(u_n)_{n \in I}$ est croissante

Et si $f$ est décroissante alors $(u_n)_{n \in I}$ est décroissante

Exemple $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_n = \dfrac{2n^2 + 1}{n^2 + 5}$

Etudier la monotonie de de la suite $(u_n)$

Rep : soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{x^2 + 5}$

On peut demontrer que $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ **comme composee de deux fonctions strictement croissantes**

Donc $(u_n)$ est strictement croissante

**Exercice1**

1) Pour tout $n$ de ℕ, on donne la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ définie par : $u_n = n^2 - 4n + 4$.
Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est croissante à partir d'un certain rang.

On commence par calculer la différence $u_{n+1} - u_n$ :

$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 4(n+1) + 4 - n^2 + 4n - 4$
$= n^2 + 2n + 1 - 4n - 4 + 4 - n^2 + 4n - 4$
$= 2n - 3$

On étudie ensuite le signe de $u_{n+1} - u_n$ :

$u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour $2n - 3 \geq 0$ donc pour $n \geq 1{,}5$.
Ainsi pour $n \geq 2$ ($n$ est entier), on a $u_{n+1} - u_n \geq 0$.
On en déduit que, la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est croissante.

**Exercice2**

Pour tout $n$ de ℕ, on donne la suite ($u_n$) définie par : $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.
Démontrer que la suite ($u_n$) est décroissante.

On considère la fonction associée $f$ définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.
Ainsi $u_n = f(n)$. $f$ est l'inverse d'une fonction croissante sur $[0;+\infty[$ donc
$f$ est décroissante sur $[0;+\infty[$. On en déduit que ($u_n$) est décroissante.

2cas-si ***tous*** les termes de la suite sont ***strictement positifs***, on peut aussi calculer le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ :

$$\text{Si } \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \text{ la suite est croissante.}$$

$$\text{Si } \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \text{ la suite est décroissante.}$$

**Exemple**

**Pour tout n :** $3 \leq n$ ; $u_n = \dfrac{2^n}{n^2}$

**Montrer que la suite** $(u_n)_{n\geq 3}$ **est croissante**

**1°methode on a** $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \iff \dfrac{\dfrac{2^{(n+1)}}{(n+1)^2}}{\dfrac{2^n}{n^2}} \geq 1$

$\iff n \geq \sqrt{2} + 1$

**On a** $n \geq 3$

**Donc** $\forall n \geq 3 \;;\quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$

**Donc** $(u_n)_{n\geq 3}$ **est croissante**

**2°methode**

$n \geq 3 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{4}{3} \geq 1 + \dfrac{1}{n}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{3}{4} \leq \dfrac{n}{n+1}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{9}{16} \leq \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2$

$\Rightarrow \quad \dfrac{18}{16} \leq 2\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2$

$\Rightarrow \quad 1 \leq 2\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2$

**Donc** $1 \leq \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

**et par suite** $(u_n)_{n\geq 3}$ **Est croissante**

**3cas -démonstration par récurrence**

**Cas particulier** $u_{n+1} = f(u_n)$

**Exemple1 soit** $(u_n)$ **la suite définie par** $\begin{cases} u_0 = 16 \\ \forall n \in \mathbb{N} \;;\; u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases}$

**Montrer que** $(u_n)$ **est décroissante**

**Rep : montrons que** $\forall n \in \mathbb{N} \;;\; u_{n+1} \leq u_n$

**Pour n=0** $\quad u_1 = 4 \quad$ **et** $\quad u_0 = 16 \quad$ **donc** $\quad u_1 \leq u_0$

**Soit n un entier naturel On suppose que** $u_{n+1} \leq u_n$

**Démontrons que** $u_{n+2} \leq u_{n+1}$

**On déduit enfin que** $\forall n \in \mathbb{N} \;;\; u_{n+1} \leq u_n$

**Donc la suite** $(u_n)$ **est décroissante**

**Exemple2 soit** $(u_n)$ **la suite définie par** $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n} \;;\quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

**Montrer que** $\forall n \in \mathbb{N} \;; 0 \leq u_n \leq 3$ **et déduire la monotonie de** $(u_n)$

## *4/suite arithmetique*

1) Définition

Exemple :

Considérons une suite numérique $(u_n)$ où la différence entre un terme et son précédent reste constante et égale à 5.
Si le premier terme est égal à 3, les premiers termes successifs sont :
$u_0 = 3$,
$u_1 = 8$,
$u_2 = 13$,
$u_3 = 18$.
Une telle suite est appelée une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme 3.

Définition : Une suite $(u_n)$ est une suite arithmétique s'il existe un nombre $r$ tel que pour tout entier $n$, on a : $u_{n+1} = u_n + r$.
Le nombre $r$ est appelé raison de la suite.

Retour à l'exemple :

La suite introduite plus haut est définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$

Méthode : Démontrer qu' une suite est arithmétique

1) La suite $(u_n)$ définie par : $u_n = 7 - 9n$ est-elle arithmétique ?

2) La suite $(v_n)$ définie par : $v_n = n^2 + 3$ est-elle arithmétique ?

reponse

1) $u_{n+1} - u_n = 7 - 9(n+1) - 7 + 9n = 7 - 9n - 9 - 7 + 9n = -9$.
La différence entre un terme et son précédent reste constante et égale à -9.
$(u_n)$ est une suite arithmétique de raison -9.

2) $v_{n+1} - v_n = (n+1)^2 + 3 - n^2 - 3 = n^2 + 2n + 1 + 3 - n^2 - 3 = 2n + 1$.
La différence entre un terme et son précédent ne reste pas constante.
$(v_n)$ n'est pas une suite arithmétique.

## 2) Expression de $u_n$ en fonction de n

Propriété : $(u_n)$ est une suite arithmétique de raison $r$ et de premier terme $u_0$.
Pour tout entier naturel $n$, on a : $u_n = u_0 + nr$.
Plus généralement si p est un entier naturel, alors $u_n = u_p + (n - p)r$.

Démonstration :
La suite arithmétique $(u_n)$ de raison $r$ et de premier terme $u_0$ vérifie la relation $u_{n+1} = u_n + r$.
En calculant les premiers termes :

$u_1 = u_0 + r$

$u_2 = u_1 + r = (u_0 + r) + r = u_0 + 2r$

$u_3 = u_2 + r = (u_0 + 2r) + r = u_0 + 3r$

…

$u_n = u_{n-1} + r = (u_0 + (n-1)r) + r = u_0 + nr$.

Méthode : Déterminer la raison et le premier terme d'une suite arithmétique

Considérons la suite arithmétique $(u_n)$ tel que $u_5 = 7$ et $u_9 = 19$.
Déterminer la raison et le premier terme de la suite $(u_n)$.

Si p est un entier naturel, alors $u_n = u_p + (n - p)r$.
Ainsi $u_9 = u_5 + 4r$ donc $19 = 7 + 4r$ ce qui donne $r = 3$
On a aussi $u_5 = u_0 + 5r$ donc $7 = u_0 + 15$ ce qui donne $u_0 = -8$

### 3) Sommes de termes consécutifs

Propriété : $n$ est un entier naturel non nul alors on a : $1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

Remarque : Il s'agit de la somme des $n$ premiers termes d'une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme 1.

Démonstration :

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & n-1 & + & n \\
+ & n & + & n-1 & + & n-2 & + & \dots & + & 2 & + & 1 \\
\hline
 & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \dots & + & (n+1) & + & (n+1)
\end{array}$$

$= n \times (n+1)$

donc : $2\times(1+2+3+...+n)=n(n+1)$

et donc : $1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

**Plus généralement :**

Propriété : Soit r un réel et $(u_n)$ une suite arithmétique de raison r. Soit n un entier naturel alors on a : $u_0 + u_1 + u_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + u_n = (n + 1) \times \dfrac{u_0+u_n}{2}$

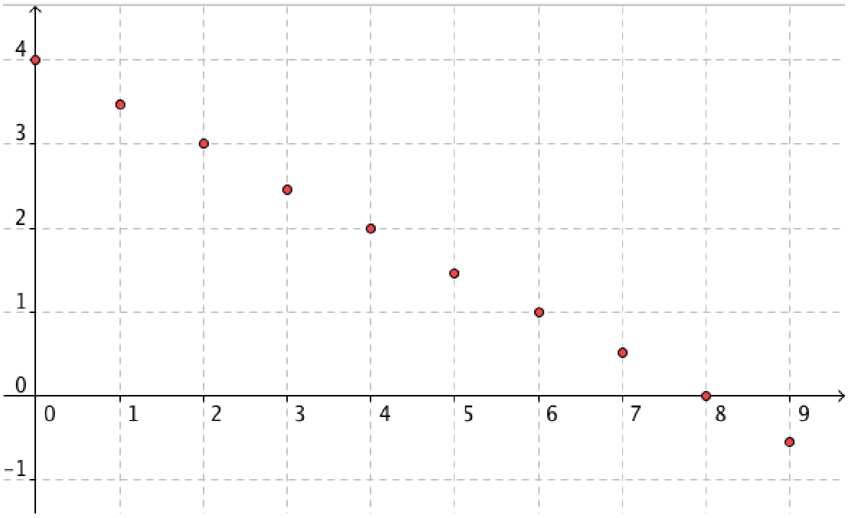
### 4) Variations

Propriété : $(u_n)$ est une suite arithmétique de raison $r$.
- Si $r > 0$ alors la suite $(u_n)$ est croissante.
- Si $r < 0$ alors la suite $(u_n)$ est décroissante.

Démonstration : $u_{n+1} - u_n = u_n + r - u_n = r$.
- Si $r > 0$ alors $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite $(u_n)$ est croissante.
- Si $r < 0$ alors $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite $(u_n)$ est décroissante.

### 3) Représentation graphique

Les points de la représentation graphique d'une suite arithmétique sont alignés.
Exemple :
On a représenté ci-dessous la suite arithmétique de raison -0,5 et de premier terme 4.




## *5/suite geometrique*

### 1) Définition

Exemple :

Considérons une suite numérique ($u_n$) où le rapport entre un terme et son précédent reste constant et égale à 2.

Si le premier terme est égal à 5, les premiers termes successifs sont :

$u_0 = 5$,

$u_1 = 10$,

$u_2 = 20$,

$u_3 = 40$.

Une telle suite est appelée une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 5.

Définition : Une suite ($u_n$) est une suite géométrique s'il existe un nombre $q$ tel que pour tout entier $n$, on a : $u_{n+1} = q \times u_n$.

Le nombre $q$ est appelé raison de la sui

exemple :

La suite introduite plus haut est définie par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$

Exemple concret :

On place un capital de 5000dh sur un compte dont les intérêts annuels s'élève à 4%.

Chaque année, le capital est multiplié par 1,04.

Ce capital suit une progression géométrique de raison 1,04.

Méthode : Démontrer si une suite est géométrique

La suite ($u_n$) définie par : $u_n = 4^{2n-1}$ est-elle géométrique ?

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4^{2(n+1)-1}}{4^{2n-1}} = \frac{4^{2n+1}}{4^{2n-1}} = 4^2 = 16.$$

Le rapport entre un terme et son précédent reste constant et égale à 16.

($u_n$) est une suite géométrique de raison 16.

### 2) Expression de $u_n$ en fonction de n

Propriété : ($u_n$) est une suite géométrique de raison $q$ et de premier terme $u_0$.

Pour tout entier naturel $n$, on a : $u_n = u_0 \times q^n$.

Plus généralement si p est un entier naturel, alors $u_n = u_p \times q^{n-p}$

Démonstration :

La suite géométrique ($u_n$) de raison $q$ et de premier terme $u_0$ vérifie la relation $u_{n+1} = q \times u_n$.

En calculant les premiers termes :

$u_1 = q \times u_0$

$u_2 = q \times u_1 = q \times (q \times u_0) = q^2 \times u_0$

$u_3 = q \times u_2 = q \times (q^2 \times u_0) = q^3 \times u_0$

…

$u_n = q \times u_{n-1} = q \times (q^{n-1} u_0) = q^n \times u_0$.

Méthode : Déterminer la raison et le premier terme d'une suite géométrique

Considérons la suite géométrique ($u_n$) tel que $u_4 = 8$ et $u_7 = 512$.

Déterminer la raison et le premier terme de la suite ($u_n$).

Si p est un entier naturel, alors $u_n = u_p \times q^{n-p}$

Ainsi $u_7 = u_4 \times q^3$ donc $\frac{u_7}{u_4} = \frac{512}{8} = 64$ ce qui donne $q^3 = 64$.

On utilise la fonction racine troisième de la calculatrice pour trouver le nombre qui élevé au cube donne 64.

Ainsi $q = \sqrt[3]{64} = 4$

Comme $q^4 \times u_0 = 8$, on a : $4^4 \times u_0 = 8$ et donc : $u_0 = \frac{1}{32}$.

3) Sommes de termes consécutifs

Propriété : $n$ est un entier naturel non nul et $q$ un réel différent de 1 alors on a :

$$1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Remarque : Il s'agit de la somme des $n$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $q$ et de premier terme 1.

Démonstration :

$S = 1 + q + q^2 + ... + q^n$

$q \times S = q + q^2 + q^3 + ... + q^{n+1}$

Ainsi :

$S - q \times S = (1 + q + q^2 + ... + q^n) - (q + q^2 + q^3 + ... + q^{n+1})$

$S - q \times S = 1 - q^{n+1}$

$S \times (1 - q) = 1 - q^{n+1}$

$S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

**Plus généralement**

Propriété : Soit q un réel non nul différent de 1 et ($u_n$) une suite géométrique de raison q. Soit n un entier naturel alors : $u_0 + u_1 + u_2$ …………….+ $u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

2) Variations

Propriété : ($u_n$) est une suite géométrique de raison $q$ et de premier terme non nul $u_0$.
Pour $u_0 > 0$ :
- Si $q > 1$ alors la suite ($u_n$) est croissante.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite ($u_n$) est décroissante.

Pour $u_0 < 0$ :
- Si $q > 1$ alors la suite ($u_n$) est décroissante.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite ($u_n$) est croissante.

Démonstration dans le cas où $u_0 > 0$ :

$u_{n+1} - u_n = q^{n+1}u_0 - q^n u_0 = u_0 q^n (q-1)$.
- Si $q > 1$ alors $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite ($u_n$) est croissante.
- Si $0 < q < 1$ alors $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite ($u_n$) est décroissante.