

Barycentre

Point pondéré

Définition

On appelle point pondéré ou point massif le couple $(A;a)$ où A est un point du plan ou de l'espace et a un réel.

Barycentre de deux points pondérés

1) Définition

Soient A et B deux points du plan.

On appelle G le barycentre des points pondérés $(A;a)$ et $(B;b)$ avec $a + b \neq 0$ le point défini

par la relation $a\vec{GA} + b\vec{GB} = \vec{0}$

Construction :

Soit G le barycentre des points pondérés $(A;a)$ et $(B;b)$ avec $a + b \neq 0$.

On utilise une décomposition par la relation de Chasles :

- Vu de A , on a successivement
$$a\vec{GA} + b\vec{GB} = \vec{0}$$
$$a\vec{GA} + b(\vec{GA} + \vec{AB}) = \vec{0}$$
$$(a + b)\vec{GA} + b\vec{AB} = \vec{0}$$

$$\text{d'où, puisque } a + b \neq 0, \vec{AG} = \frac{b}{a + b}\vec{AB}$$

et G est alors l'unique point défini par cette relation vectorielle.

- Vu de B , on obtient de même $\vec{BG} = \frac{a}{a + b}\vec{BA}$

- Vu d'un point O quelconque de l'espace, on a : $a\vec{GA} + b\vec{GB} = \vec{0}$
$$a(\vec{GO} + \vec{OA}) + b(\vec{GO} + \vec{OB}) = \vec{0}$$
soit $(a + b)\vec{GO} + a\vec{OA} + b\vec{OB} = \vec{0}$ soit encore, $\vec{OG} = \frac{a}{a + b}\vec{OA} + \frac{b}{a + b}\vec{OB}$

Remarques

Dans le cas particulier où G est le barycentre des points pondérés $(A;a)$ et $(B;a)$ où $a \neq 0$, on dit que G est l'isobarycentre de A et B .

Comme $\vec{AG} = \frac{a}{a + a}\vec{AB} = \frac{1}{2}\vec{AB}$, l'isobarycentre de deux points A et B est le milieu du segment $[AB]$.

2) Coordonnées du barycentre

Propriété

Soient deux points A et B du plan de coordonnées $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.

Le barycentre des points pondérés $(A;a)$ et $(B;b)$ avec $a + b \neq 0$ est le point G de coordonnées

$$x_G = \frac{ax_A + bx_B}{a + b} \quad y_G = \frac{ay_A + by_B}{a + b}$$

Démonstration : la construction "vu de O " permet de mettre en évidence les coordonnées du point G dans un repère d'origine O .

On utilisera pour cela le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ dans le plan et le repère

3) homogénéité du barycentre

Propriété

Soient A et B deux points du plan ou du plan.

Soit G le barycentre des points pondérés $(A;a)$ et $(B;b)$ avec $a + b \neq 0$.

Pour tout réel k non nul, G est encore le barycentre des points pondérés $(A;ka)$ et $(B;kb)$.

Démonstration : Si G est le barycentre de $\{(A;a);(B;b)\}$ avec $a + b \neq 0$

$$\text{alors } a\vec{GA} + b\vec{GB} = \vec{0} \text{ et } a + b \neq 0$$

$$k(a\vec{GA} + b\vec{GB}) = \vec{0} \text{ et } k(a + b) \neq 0$$

$$(ka)\vec{GA} + (kb)\vec{GB} = \vec{0} \text{ et } ka + kb \neq 0 \text{ car } k \neq 0$$

et G est également barycentre de $\{(A;ka);(B;kb)\}$.

4) position du barycentre

Nous avons vu que pour tous points A et B de l'espace et si G est le barycentre des points pondérés $(A;a)$ et $(B;b)$ avec $a + b \neq 0$, $\vec{AG} = \frac{a}{a+b}\vec{AB}$. Les vecteurs \vec{AG} et \vec{AB} sont colinéaires et le point G se trouve sur (AB) .

Propriétés de position :

++) Si a et b sont de même signe, alors : $G \in [AB]$.

+++ Si a et b sont de signes contraires, alors $G \notin [AB]$.

++++) si $|a| > |b|$, alors G est « plus proche » de A que B .

5) propriété caractéristique

Soient A et B deux points du plan ou de l'espace et G le barycentre des points pondérés $(A;a)$ et $(B;b)$ avec $a + b \neq 0$.

Alors, pour tout point M de l'espace, $a\vec{MA} + b\vec{MB} = (a + b)\vec{MG}$

démonstration : Il suffit là encore de considérer la construction vu d'un point M quelconque.

remarque : Cette dernière propriété permet de retrouver les résultats précédents :

- En considérant $M = G$ dans l'égalité, on trouve $a\vec{GA} + b\vec{GB} = (a + b)\vec{GG} = \vec{0}$
- En considérant $M = A$, on trouve $a\vec{AA} + b\vec{AB} = (a + b)\vec{AG}$ soit $\vec{AG} = \frac{a}{a+b}\vec{AB}$

Barycentre de 3 points

1) Définition

Soient A , B et C trois points du plan ou de l'espace affectés des coefficients respectifs a , b et c , avec $a + b + c \neq 0$.

Le barycentre G des points pondérés $(A;a)$, $(B;b)$ et $(C;c)$ est défini de manière analogue par

$$a\vec{GA} + b\vec{GB} + c\vec{GC} = \vec{0}$$

Première Construction :

En utilisant, comme pour le barycentre de deux points, la relation de Chasles avec différents points de vue, on trouve :

$$\text{Vu de } A, \vec{AG} = \frac{b}{a+b+c}\vec{AB} + \frac{c}{a+b+c}\vec{AC}$$

$$\text{Vu de } O, \text{ un point de l'espace : } \vec{OG} = \frac{a}{a+b+c}\vec{OA} + \frac{b}{a+b+c}\vec{OB} + \frac{c}{a+b+c}\vec{OC}$$

2) Propriétés

Le barycentre de trois points vérifie les mêmes propriétés que le barycentre de 2 points :

- **homogénéité du barycentre** : le barycentre des points pondérés $(A;a)$, $(B;b)$ et $(C;c)$ où $a + b + c \neq 0$ est également le barycentre des points pondérés $(A;ka)$, $(B;kb)$ et $(C;kc)$ pour tout $k \neq 0$.
- L'isobarycentre de trois points A , B et C étant le point vérifiant $a\vec{GA} + b\vec{GB} + c\vec{GC} = \vec{0}$, c'est le centre de gravité du triangle ABC .
- **propriété caractéristique** :

pour tout point M du plan ou de l'espace, $a\vec{MA} + b\vec{MB} + c\vec{MC} = (a + b + c)\vec{MG}$

3) Associativité du barycentre

Propriété

Soit G le barycentre des points pondérés $(A;a)$, $(B;b)$ et $(C;c)$ où $a + b + c \neq 0$. Il existe alors au moins deux coefficients dont la somme est non nulle. Prenons $a + b \neq 0$ par exemple.

Soit H le barycentre (dit partiel) de $(A;a)$ et $(B;b)$.

G est alors le barycentre de $(H;a + b)$ et $(C;c)$

Démonstration : Soit G le barycentre de $(A;a)$, $(B;b)$ et $(C;c)$ où $a + b + c \neq 0$

$$\text{alors } a\vec{GA} + b\vec{GB} + c\vec{GC} = \vec{0} \quad (1)$$

Comme H est le barycentre du système de points pondérés $(A;a)$ et $(B;b)$ avec $a + b \neq 0$; on a,

$$\text{vu du point } G, \vec{GH} = \frac{a}{a+b}\vec{GA} + \frac{b}{a+b}\vec{GB} \text{ soit } a\vec{GA} + b\vec{GB} = (a+b)\vec{GH} \quad (2)$$

La soustraction de (2) à (1) permet d'obtenir $(a+b)\vec{GH} + c\vec{GC} = \vec{0}$ avec $(a+b) + c \neq 0$ et G est le barycentre de $(H;a + b)$ et $(C;c)$.

4) Coplanarité

Propriété

Soient A , B et C trois points non alignés de l'espace.

Le barycentre G des points pondérés $(A;a)$, $(B;b)$ et $(C;c)$ où $a + b + c \neq 0$ est un point du plan défini par les trois points A , B et C .

Démonstration : Comme les trois points A , B et C ne sont pas alignés, ils définissent un unique

plan (P) . Les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} n'étant pas colinéaires, ils définissent une base de ce plan.

Vu de A , le barycentre G des points pondérés $(A;a)$, $(B;b)$ et $(C;c)$ se traduit par

$$\vec{AG} = \frac{b}{a+b+c}\vec{AB} + \frac{c}{a+b+c}\vec{AC}$$

Comme le vecteur \vec{AG} s'exprime en fonction des vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} , en utilisant les résultats de coplanarité étudiés dans le chapitre sur le calcul vectoriel, ces trois vecteurs sont coplanaires et les points A , B , C et G sont coplanaires.

5) propriété caractéristique

Soient A , B et C trois points du plan et G le barycentre des points pondérés $(A;a)$, $(B;b)$ et $(C;c)$ où $a + b + c \neq 0$.

Alors, pour tout point M de l'espace, $a\vec{MA} + b\vec{MB} + c\vec{MC} = (a + b + c)\vec{MG}$

Barycentre de 4 points ou plus

De la même manière, on étend à quatre points et plus les définitions vues pour le barycentre d'un système pondérés à 3 points :

Définition

Le barycentre des n points pondérés $(A_1, a_1), (A_2, a_2), \dots, (A_n, a_n)$ où $\sum_{i=1}^n a_i \neq 0$ est l'unique point

$$G \text{ défini par } \sum_{i=1}^n a_i \vec{GA}_i =$$

En particulier, la propriété d'associativité sera utile pour la construction du barycentre

Remarque importante :

Si $\sum_{i=1}^n a_i = 0$ alors le vecteur $\sum_{i=1}^n a_i \vec{MA}_i$ est indépendant du point M ; il existe donc un vecteur

constant \vec{u} tel que $\sum_{i=1}^n a_i \vec{MA}_i = \vec{u}$.