Série d'exercices (la logique)

www.0et1.com

EXERCICE 1 :

Ecrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :

a) Il existe un nombre rationnel dont le carré vaut deux.

b) La somme de deux nombres positifs quelconques est un nombre positif.

c) Le carré de n'importe quel nombre réel est un nombre positif.

d) L'équation $x^2-3x+1=0$ admet une solution réelle.

e) Tout entier naturel est pair ou impair.

f) Pour chaque entier, on peut trouver un entier strictement plus grand.

g) Il y a un entier plus grand que tous les entiers.

h) Si un nombre réel x inférieur de -1 alors il est strictement négatif.

i) Le produit de deux réels est nul si et seulement si l'un d'entre eux est nul.

j) L'équation sin x = x a une et une seule solution dans $\mathbb{R}$.

EXERCICE 2 :

Donner la négation des assertions suivantes :

1) Tout triangle rectangle possède un angle droit.

2) Dans toutes les écuries, tous les chevaux sont noirs.

3) Pour tout entier relatif x, il existe un entier relatif y tel que, pour tout entier relatif z, la relation $z<x$ implique la relation $z< x+1$.

4) $(\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R})(\exists\ \alpha > 0):|x-7/5|<\alpha \Longrightarrow |5x-7|<\varepsilon$.

EXERCICE 3 :

Donner la négation des propositions suivantes et dire pour chacune d'elles si elle est vraie ou fausse.

(P) $(\forall\ x \in \mathbb{R}): \sqrt{1+x^2-|x|}\geq 0$;

(Q) $(\exists\ n \in \mathbb{N}^*)\ (\forall\ x \in \mathbb{R}): x^{2n}/1+x>1$

(R) $(\forall\ x \in \mathbb{R})\ (\exists\ y \in \mathbb{R}): y<x$;

(S) $(\forall\ x \in \mathbb{R}):(x^2-|x|+1\geq 0)$ et $(-1\leq x\leq 1)$

(T) $(\forall\ x \in [1,+\infty[\ ): x^2+x-2\geq 0$;

(U) $(\forall\ x \in \mathbb{R}):(x\geq 0)$ ou $(x\leq 0)$

(H) $(\forall\ y \in \mathbb{R}^*)\ (\exists\ x \in \mathbb{R}): x^2-xy+y^2=0$

EXERCICE 4 : Donner la négation des propositions suivantes :

(P) $(\forall\ x \in \mathbb{N}):x\neq 1 \Longrightarrow x>1$

(Q) $(\forall\ x \in \mathbb{R})(\exists\ \alpha > 0):|x|<\alpha \Longrightarrow |(x-1)/(x+1)\ \ -1|<\alpha$

(R) $(\forall\ x \in \mathbb{R})\ (\forall\ y \in \mathbb{R}):x-\ y=1 \Longrightarrow x>1$

EXERCICE 5 :

Montrer par Le raisonnement par contre-exemple que les propositions suivantes sont fausses :

contre-exemple que les propositions suivantes sont fausses :

(P) $(\forall\ x \in \mathbb{R}^*): x+\ 1/x\ \ \geq 2$

(Q) $(\forall\ x \in \mathbb{R})\ (\forall\ y \in \mathbb{R}):2x-4\ y\neq 5$

(R) $(\forall\ n \in \mathbb{N}^*)(\forall\ m \in \mathbb{N}^*): 1/n\ \ +\ \ 1/n+1\ \ \ +\cdots+1/n+m\ \ \ \in \mathbb{N}$

(S) $(\forall a \in \mathbb{R}^+)(\forall b \in \mathbb{R}^+)$: $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$
(T) $(\forall x \in]0,+\infty[)(\forall y \in]0,+\infty[)$: $\sqrt{xy}=2xy/x+y$
(U) $(\forall x \in]0,1[)(\forall y \in]0,1[)$: $1/x+1/y<1-xy$
(V) $(\forall x \in]0,1[)$: $2x/x^2(1-x^2)<1$

EXERCICE 6 : Soient les quatre assertions suivantes :
(P) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})$: $x+y>0$; (Q) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})$: $x+y>0$
(R) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})$: $x+y>0$; (S) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})$: $y2>x$
1. Les assertions précédentes sont-elles vraies ou fausses ?
2. Donner leurs négations.

EXERCICE 7 :
1) Soient a et b deux réels. Montrer que : $|a|<1$ et $|b|<1 \Rightarrow |a+b|<|1+ab|$
2) Soient x et y deux réels non nuls. On considère les deux propositions : (P) : $2x+4y=1$
et (Q) : $1/x^2+y^2\leq$. Montrer que $(P \Rightarrow Q)$.

EXERCICE 8 :
1) *Démontrer en utilisant des équivalences successives que la proposition suivante est vraie :*
$(T)\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^{+2}: 4x+25y\geq 20\sqrt{xy}$
2)a) soit a, b et c des reels montrer que $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ac$
b) Montrer que : $a^3+a=b^3+b \Leftrightarrow a=b$
3) Soit x un réel positif($x \in \mathbb{R}^+$).
a) Montrer que : $\sqrt{x}/(x^2-x+1)\leq 4/3\ \sqrt{x}$
b) Montrer que : $\sqrt{2x+2}-\sqrt{x}=1 \Leftrightarrow x=1$
4) Soient a et b deux réels de l'intervalle $]-1;1[$.
a) Montrer que : $-1\leq(a+b)/(1+ab)\leq 1$
b) Montrer que : $|a+b|\leq|1+ab|$

EXERCICE 9 : Montrer que :
1) $(\forall x \in [1,+\infty[)(\forall y \in [4,+\infty[)$: $\sqrt{x-1}+2\sqrt{y-4}=(x+y)/2 \Leftrightarrow x=2$ et $y=8$
2) $\forall (x,) \in \mathbb{R}^2$: $x+y=0 \Leftrightarrow (\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{y^2+1}+y)=1$
3) $\forall (a,) \in \mathbb{R}^2$: $|a+b|\leq|1+ab| \Leftrightarrow (a^2-1)(b^2-1)\geq 0$
4) $\forall (x,) \in \mathbb{R}2$: $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=2 \Leftrightarrow x=y=0$
5) $\forall (x,,) \in \mathbb{R}^3$: $x+y+z=0 \Leftrightarrow x^3+y^3+z^3=3xyz$

EXERCICE 10 :
Soient x et y deux réels strictement positifs. Montrer que :
$x<y \Leftrightarrow x/y<(2x+5y)/(5x+2y)<y/x$

EXERCICE 11 : En utilisant un raisonnement par la contraposée, démontrer que :
1) $(\forall x \in \mathbb{R})$: $x\neq 0 \Rightarrow \sqrt{1+x}\neq 1+x/2$
2) $(\forall x \in \mathbb{R})$: $x^2\neq 3 \Rightarrow 2/\sqrt{x^2+1}\neq 1$
3) $\forall (x,y)\in \mathbb{R}^2$: $(xy-1)(x-y)\neq 0 \Rightarrow x(y^2+y+1)\neq y(x^2+x+1)$
4) $\forall (x,y)\in \mathbb{R}^2$: $(x\neq 1$ et $y\neq 1) \Rightarrow x+y-xy\neq 1$
5) montrer que $(H)\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2: a\neq -\frac{11}{9}b \Rightarrow \frac{a-b}{a+b}\neq 10$

www.0et1.com

6) Soient a et b deux réels tels que $a \neq -3b$ montrer que : $a \neq -14b/3 \Rightarrow (2a+b)/(a+3b) \neq 5$
7) Soient x et y deux réels. Montrer que : $x \neq y \Rightarrow x^3+4x \neq y^3+4y$
8) Soit n un entier naturel. Montrer que : n^2 **est pair** $\Rightarrow$ **n est pair**

EXERCICE 13 : Montrer par disjonction des cas que :
1) $(\forall\ n \in \mathbb{N})$: n^2+n+1 est un nombre impair.
2) $(\forall\ n \in \mathbb{N})$: n^3-n est un multiple de 3.
3) $(\forall\ n \in \mathbb{N})$: $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 3.
4) $(\forall\ x \in \mathbb{R})$: $x-\sqrt{x^2+1} < 0$
5) $(\forall\ x \in \mathbb{R})$: $|x-1| \leq x^2-x+1$

EXERCICE 14 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
(E1): $3+4|x-1|=2x$; (E2) : $2|x-1|=|x|$ (E3) : $|x-1|+|2x-3|=6$
(E4) $|x-2|+|x-3|=x+2$ (E5) $2x^2-|x-3|-4=0$;
(E6) $\sqrt{x+3}=x+1$ (E7) $x^2-(1+m)x+4=0$ avec m est un paramètre réel.

EXERCICE 15 : Raisonnement par l'absurde
1) Montrer que 0 n'est pas une racine du polynôme $P(x)=2x^4+12x-1$
2) Montrer que : $(\forall\ x \in \mathbb{R})$: $4c(x) \neq x^2-4x+12$
3) Montrer que : $(\forall\ n \in \mathbb{N}^*)$: $\sqrt{n/(n+1)} \notin \mathbb{Q}$
4) Soit $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ et $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Montrer que : $p+q\alpha=0 \Rightarrow p=q=0$

EXERCICE 16 :
Soit n un entier naturel
1) Montrer que si n est pair alors n^2 est pair aussi.
2) Montrer que si n^2 est pair alors n est pair aussi.
3) a) Montrer que : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$; $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$; $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$; $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$; $\sqrt{2}+\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$
b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sqrt{n^2+1} \notin \mathbb{N}$.

EXERCICE 17 :
1) Soient a et b deux entiers naturels tels que a>b. Montrer que $(a^2+\ )/(a^2-b^2) \notin \mathbb{N}$.
2) Soient a et b deux entiers naturels non nuls. Montrer que si $a/b+1=b/a+1$ alors $a=b$.
3) Soient a, b et c trois réels strictement positifs tels que : $abc>1$ et $a+b+c < 1/a+1/b+1/C$
a) Montrer que a, b et c sont distincts de 1.
b) Montrer que $\min(a,b,c)<1$.

EXERCICE 18 :
Démontrer par récurrence que :
1) $(\forall\ n \in \mathbb{N})$: n^3-n est un multiple de 3.
2) $(\forall\ n \in \mathbb{N})$: $3^{2n}-1$ est un multiple de 4.
3) $(\forall\ n \in \mathbb{N})$: $n(n^2+5)$ est un multiple de 3.
4) $(\forall\ n \in \mathbb{N})$: 6 divise le nombre $n(n+1)(n+2)$.
5) $(\forall\ n \in \mathbb{N}^*)$: $3^{2n}-2^n$ est divisible par 7.
6) $(\forall\ n \in \mathbb{N})$: $2^{3n}-1$ est divisible par 7.

www.0et1.com

7) ($\forall$ $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$) : $\mathbf{2^{3n+2}-4}$ est divisible par 7.
8) ($\forall$ $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$) : $\mathbf{3^{2n+1}+2^{n+2}}$ est divisible par 7.
9) ($\forall$ $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$) : $\mathbf{3^{2n+1}+4^{n+1}-2(-1)^n}$ est divisible par 5
10) ($\forall$ $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$) : $\mathbf{4^n-3n-1}$ est divisible par 9.
11) ($\forall$ $\mathbf{n} \in \mathbb{N}*$) : $\mathbf{10^n-1}$ est divisible par 9.
12) ($\forall$ $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$) : $\mathbf{10^n-(-1)^n}$ est divisible par 11.
13) ($\forall$ $\mathbf{n} \in \mathbb{N}*$) : $\mathbf{3^{2n}+2^{6n-5}}$ est divisible par 11.
14) ($\forall$ $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$) : $\mathbf{4^{2n+2}-1}$ est divisible par 15.
15) ($\forall$ $\mathbf{n} \in \mathbb{N}*$) : $\mathbf{3.5^{2n-1}+2^{3n-2}}$ est divisible par 17.

EXERCICE 19 :

Démontrer les énoncés suivants par récurrence :

1- $(\forall n \in \mathbb{N}) : \sum_{k=0}^{n} (2^k) = (1)+(2)+(4)+(8)+....+(2^n) = 2^{n+1}-1$

2- $(\forall n \in \mathbb{N}) : \sum_{k=0}^{n} (k) = (0)+(1)+(2)+(3)+....+(n) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$

3- $(\forall n \in \mathbb{N}) : \sum_{k=0}^{n} (k^2) = (0)+(1)+(4)+(9)+....+(n^2) = \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$

4- $(\forall n \in \mathbb{N}) : \sum_{k=0}^{n} (k^3) = (0)+(1)+(8)+(27)+....+(n^3) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

5- $(\forall n \in \mathbb{N}) : \sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (0\times1)+(2+1)+(4+1)+(6+1)+....+(2n+1) = (n+1)^2$

6- $(\forall n \in \mathbb{N}) : \sum_{k=0}^{n} k(k+1) = (0\times1)+(1\times2)+(2\times3)+(3\times4)+....+(n(1+n)) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

EXERCICE 20 :

Soit x un réel strictement positif.
1) Démontrer par récurrence que : ($\forall$ $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$) : $\mathbf{(1+x)^n \geq 1+nx}$.
2) En déduire que : a) ($\forall$ $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$) : $\mathbf{2^n \geq 1+n}$
b) ($\forall$ $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$) : $\mathbf{3^n \geq n}$
c) ($\forall$ $\mathbf{n} \in \mathbb{N}*$) : $\mathbf{(1+n)^n \geq 1+n^2}$

EXERCICE 21 :

Soit f une fonction numérique définie de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ tel que :
($\forall$ $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$) : $\mathbf{f(n+1)=2\,f(n)+5}$ et $\mathbf{f(0)=3}$
1) Déterminer f(1) et f(2).
2) Démontrer par récurrence que : ($\forall$ $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$) : $\mathbf{f(n)=2^{n+3}-5}$

www.0et1.com