NOTION DE LOGIQUE

WWW.OET1.COM

https://youtu.be/nC17mUSyFLU

1-introduction

a-La Logique mathématique s'intéresse à l'étude de la pensée abstraite et des méthodes de raisonnement, car les théories mathématiques ne sont pas une synthèse de résultats sans liens entre elles, mais des résultats acceptés (textes valides).
Le "raisonnement mathématique" ou la "logique" permettent de prouver d'autres résultats.
Ce raisonnement est basé sur des règles spécifiques et est appelé règles logiques

b- Les mathématiques utilisent la langue parlée

En plus des symboles ou des lettres: $=$ ، $\sqrt{\ }$ ، $\leq$ ، a,b,c ,x,y,0,1,2,3.....

.Le texte mathématique est une compilation de mots, de lettres et de symboles .

2-definitions

Propositions logiques

Définition

Une proposition logique (ou assertion) est une affirmation formée d'un assemblage de symboles et de mots, portant sur des objets mathématiques, à laquelle on peut clairement attribuer la valeur vraie ou la valeur faux.

On note P une proposition.
Par définition A satisfait les 3 principes (ou axiomes) suivants :

- **Principe d'identité : P est P.**
  Autrement dit si P est vrai alors P est vrai et si P est faux alors P est faux.
- **Principe de non contradiction : P ne peut pas à la fois être vrai et faux.**
- **Principe du tiers exclus : soit P est vrai, soit P est faux.**
  Il n'existe pas d'autre valeur de vérité en logique mathématique.

Ces trois principes constituent le fondement de tout raisonnement mathématique.

exemples
a-Soit P la proposition « Le carré d'un nombre réel est strictement positif ».
Alors ? Vrai ou faux ?
L'intuition première serait de répondre "ça dépend du nombre", c'est le cas pour la plupart des nombres mais c'est faux pour zéro (car $0^2 \geq 0$).
Le problème est que cette réponse est en contradiction avec le principe du tiers exclus. Il faut donc attribuer clairement à cette proposition la valeur vrai ou la valeur faux.

Étant donné qu'il existe au moins un nombre (ici zéro) pour lequel cette proposition est fausse, on dira que la proposition P est fausse.

b- A : « $3 \times 5 = 8$**»**
La proposition A est fausse.

B : « 2+3=5»
La proposition B est vraie.
C : « x>1 »
C n'est pas une proposition logique complète car elle contient une variable libre x. On ne sait pas ce qu'est x (un point ? un nombre entier ? un vecteur ? une étoile de l'univers ?). On ne peut donc pas attribuer de valeur de vérité à la proposition C.
C′ : « Soit x un nombre réel, alors x>1 »
La proposition C′ est fausse. En effet C′ est une proposition logique car on a défini la variable x comme étant un nombre réel. Mais elle est fausse car par exemple 0 est un nombre réel et 0<1.
On utilise ici un contre exemple pour prouver que la proposition C′ est fausse.
Ce type de raisonnement sera approfondi dans la dernière partie.

Remarque

Les propositions logiques ne peuvent prendre que deux valeurs : VRAI ou FAUX (d'où le nom de logique bivalente).
Il faut bien faire la distinction entre une proposition (qui est une phrase) et sa valeur (qui est soit VRAI soit FAUX).

3– Quantificateurs

Le quantificateur universel

On note « pour tout x élément de Ω, la proposition P(x) est vraie » ainsi « ∀x∈Ω,P(x)».
On s'habitue rapidement à lire les quelques symboles mathématiques.

- **Le symbole ∀ (un A retourné) se lit "quel que soit". C'est un quantificateur, il indique que la propriété est vraie pour tous les objets satisfaisants la condition qui suit.**
- **x est un objet mathématique (un nombre, un point, un vecteur...).**
- **Ω est un ensemble d'objets. Par exemple le plan qui est un ensemble de points, ou bien l'ensemble ℝ qui est l'ensemble des nombre réels.**

La notation ∀ vient de l'allemand Alle qui signifie « tous » en français.

Exemple 1 :

On nomme A l'ensemble des élèves d'une classe.
On note P(x) : « x est présent » (x est un élève de la classe)
La proposition Q : « Tous les élèves de la classe sont présents » s'écrit alors ∀x∈A,P(x)

Exemple 2 :

On nomme ℝ l'ensemble des nombres réels.

La proposition Q' : « Le carré d'un nombre réel est toujours positif » s'écrit alors ∀x∈ℝ,x^2≥0

Le quantificateur existentiel

Reprenons notre premier exemple.
La proposition Q : « Tous les élèves de la classe sont présents ». Essayez de déterminer la negation de la proposition Q (dans une phrase).
Attention ! Il y a un piège !
Le contraire de « Tous les élèves de la classe sont présents » n'est pas « Tous les élèves de la classe sont

absents » !
En effet, il suffit qu'un seul élève soit absent pour que la proposition Q soit fausse.
On dira donc que la proposition contraire de Q est « Au moins un élève de la classe est absent »

Il nous faut un autre quantificateur pour traduire « il existe au moins un ».
pour simplifier la notation, on utilisera le symbole ∃ (un E à l'envers).

Exemple :

P : « $\exists x \in \mathbb{R}, x^2=1$ »
La proposition P se lit « Il existe au moins un nombre réel x dont le carré est égal à 1. ».
Voyez comme la notation mathématiques est plus pratique !

Plusieurs quantificateurs

On peut utiliser deux quantificateurs (ou plus) dans une même proposition. Dans ce cas l'ordre des quantificateurs est important.

Exemple1 :
Traduisez en français les proposition P et Q et donnez leur valeur de vérité :
P:$\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, x<y$

Q:$\exists y \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}, y<x$

reponse : La proposition P signifie « Pour tout entier naturel x, il existe un entier naturel y strictement supérieur à x. »
La proposition P est vraie

La proposition Q signifie « Il existe un entier naturel strictement inférieur à tous les entiers naturels »
La proposition Q est fausse. Pour le prouver, on peut utiliser un contre exemple. En effet il n'existe aucun entier naturel strictement inférieur à 0.

Exemple2 :

$P_1 : (\forall n \in \mathbb{R}), (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$

$P_2 : (\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists y \in \mathbb{R}), x \leq y$

$P_3 : (\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}), x \leq y$

$P_4 : (\exists n \in \mathbb{R}), n \geq 0$

$P_5 : (\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}), x^2 \leq y^2$

$P_6 : (\exists x \in \mathbb{R})\ (\exists y \in \mathbb{R}), \sqrt{x+1} + 2\sqrt{y-4} = 0$

$P_7 : (\forall x \in \mathbb{R})\ (\forall y \in \mathbb{R}), |x+y| \leq |x| + |y|$

$P_8 : (\forall x \in \mathbb{R}^+)\ (\forall y \in \mathbb{R}^-), y \leq x$

$P_9 : (\forall x \in \mathbb{N})\ (\exists y \in \mathbb{N}), 1^x = 1^y$

Quelles sont les propositions vrais parmis las propositions precedentes

Remarque

1−si les quantificateurs sont de même type alors il n'y a pas d'importance a leurs ordre

2−si les quantificateurs sont de type différents alors leurs ordre est très important

3-Opérateurs de base

Les opérateurs permettent de construire de nouvelles propositions à partir d'une ou de plusieurs propositions initiales.
Commençons par le premier (et le plus simple !) d'entre eux l'opérateur « NON ».

La négation

Soit P une proposition. On définit une proposition « non P » que l'on note $\overline{P}$ **ou** $\rceil P$
Si P est vraie alors $\overline{P}$ **est fausse.**
Si P est fausse alors $\overline{P}$ **est vraie.**

Définition :
Une table de vérité est un tableau définissant la valeur d'une fonction logique pour chacune des combinaisons possibles des entrées.

Par convention et pour faciliter la lecture de grandes tables, on écrit 0 pour la valeur FAUX et 1 pour la valeur VRAI. $1:V \quad O:F$

P	$\rceil P$
1	**0**
0	**1**

Quelques exemples :
A : « rabat est la capitale du maroc » (1)
$\rceil A$ **: « rabat n'est pas la capitale du maroc » (0)**

B : « π est un nombre entier » (0)
$\rceil B$**: « π n'est pas un nombre entier » (1)**

C : « 5 est un nombre impair » (1)
$\rceil C$ **: « 5 est un nombre pair » (0)**

Ce premier opérateur doit maintenant vous paraître assez simple. Pour construire des raisonnements logiques on a besoin d'utiliser des opérateurs permettant de lier deux propositions logiques entre elles (on les appelle des opérateurs binaires).

REMARQUE

1− $\overline{\overline{P}} = P$

2− LA NEGATION DE LA PROPOSITION $(P)(\forall n \in E), A(n)$

EST LA PROPOSITION $(\overline{P})(\exists n \in E), \rceil A(n)$

3−la negation de la proposition $(P)(\exists n \in E), A(n)$

est la proposition $(\overline{P})(\forall n \in E), \rceil A(n)$

exemples

donner la negation des propositions suivantes

$A_1 : (\forall n \in \mathbb{R}), n^2 \langle 0$

$A_2 : (\exists n \in \mathbb{R}), n^2 = 1$

$A_3 : (\forall n \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}); n^2 + y^2 = 1$

$A_4 : (\exists n \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}), n + y = ny$

$A_5 : (\forall n \in \mathbb{R}^*)(\exists y \in \mathbb{R}^*), y = \frac{1}{n}$

$A_6 : (\exists n \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{Z}), ny \geq 0$

solution

$\overline{A_1} : (\exists n \in \mathbb{R}), n^2 \geq 0$

$\overline{A_2} : (\forall n \in \mathbb{R}), n^2 \neq 1$

$\overline{A_3} : (\exists n \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}); n^2 + y^2 \neq 1$

$\overline{A_4} : (\forall n \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}), n + y \neq ny$

$\overline{A_5} : (\exists n \in \mathbb{R}^*)(\forall y \in \mathbb{R}^*), y \neq \frac{1}{n}$

$\overline{A_6} : (\forall n \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{Z}), ny \langle 0$

La conjonction « et ».
Soient A et B deux propositions.
On définit une nouvelle proposition « A et B » que l'on note « A ∧ B »
Cette nouvelle proposition est

- **Vraie lorsque A et B sont vraies en même temps**
- **Fausse dans tous les autres cas**

On déduit de cette définition la table de vérité de la proposition « A ∧ B »

A	B	A ∧ B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

A	B	$AetB$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Les deux première colonnes permettent de lister tous les cas possibles pour les valeurs de vérité de A et de B. La dernière colonne associe la valeur de vérité de la proposition « A ∧ B ».
Il est important de bien comprendre la table de vérité de l'opérateur « et » car il est utilisé dans de nombreux raisonnements.

Quelques exemples :
A : « 5 est un nombre inférieur à 10 et 5 est pair »
Soit A′ : « 5 est un nombre inférieur à 10 » A′ est vraie
Soit A″ : « 5 est pair » A″ est fausse
La proposition A est la proposition « A′∧A″ »
D'après la table de vérité de l'opérateur binaire « et », on en déduit que la proposition A est fausse.

La disjonction« ou ».

Le deuxième opérateur binaire que nous allons étudier est l'opérateur « ou »
Soient A et B deux propositions.
On définit une nouvelle proposition « A ou B » que l'on note « A ∨ B » (On retourne le symbole ∧).
Cette proposition est :

- **fausse lorsque A et B sont fausses en même temps**
- **vraie sinon**

Autrement dit, la proposition « A ∨ B » est vraie uniquement si A ou B est vraie (ou les deux !).

tables de vérité,

A	B	A ∨ B
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

A	*B*	*AouB*
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

exemple
On considère une proposition A.
A : « 5 est un nombre inférieur à 10 ou 5 est pair »
Quelle est la valeur de vérité de cette proposition ?

Notion d'implication

Un exemple

Prenons un exemple de relation d'implication : « Il pleut. » ⇒ « Le sol est mouillé. ». Cette proposition est vraie s'il suffit qu'il pleuve pour que le sol soit mouillé. Mais attention si le sol est mouillé il ne pleut pas forcément (le fleuriste peut avoir vidé un sceau d'eau sur le sol).

Il est important de bien comprendre cette notion. On suppose vraie l'implication précédente.
S'il pleut alors le sol est mouillé.
En revanche si le sol est mouillé, il est impossible de prévoir s'il pleut ou non.
Soient deux propositions P et Q.
On note P ⇒ Q (et on lit P implique Q) la proposition qui prend les même valeurs de vérité que la proposition $\rceil P \vee Q$.

P	Q	$\rceil P$	$\rceil P$ ou Q
1	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

On remarque que la proposition($\rceil P$ ou Q) n'est fausse que si P est vrai et Q est fausse

Plusieurs formulations pour une même notion

P ⇒ Q se lit aussi :

- **Si P alors Q**
- **Il suffit que P pour que Q**
- **Il est nécessaire que Q pour que P**
- **Il faut que Q pour que P**

Ainsi, à chaque fois que vous entendez dans le langage courant l'une des formulations précédente, c'est en fait une implications entre deux propositions.
Remarque :
Si P est fausse, P ⇒ Q est vraie.

Implication réciproque

Encore un petit quelque chose. P et Q sont toujours deux propositions.
La proposition Q ⇒ P est appelée l'implication réciproque de la proposition P ⇒ Q.

Equivalence

Définition

Le symbole de l'équivalence est ⇔. Une double flèche qui n'est pas sans rappeler la flèche de l'implication vue juste au dessus.
On dit que la proposition P ⇔ Q est vraie (et on lit P équivaut à Q ou P si et seulement si Q) quand l'implication P ⇒ Q et l'implication réciproque Q ⇒ P sont vérifiées en même temps.

Donc P ⇔ Q est (P ⇒ Q) ∧ (Q ⇒ P).

table de vérité

On

P	Q	$\rceil P$	$\rceil Q$	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1

remarque que l'équivalence entre P et Q est vraie lorsque P et Q ont la même valeur de vérité (toutes deux vraies, ou toutes deux fausses).

Pour démontrer une équivalence, on utilise souvent la règle de la double implication :

- **on démontre dans un premier temps une implication**
- **puis dans un second temps on démontre l'implication réciproque**

On en déduit que l'équivalence est vérifiée.

remarque

$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (Q \Leftrightarrow P)$

$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (nonPouQ)$

$(Q \Rightarrow P) \Leftrightarrow (nonQ\ ouP)$

$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q)$ **et** $(Q \Rightarrow P)$

Exemple et contre exemple

Pour montrer qu'une proposition de la forme ∃x∈Ω,P(x) est vraie, on cherche un x pour lequel P(x) est vraie. C'est donner un exemple.

exemple :

P : « $\exists x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, \exists z \in \mathbb{N}, x^2 = y^2 + z^2$»

Démontrez que P est vraie.

solution:

Soient x = 5, y = 4, z = 3.

x, y et z vérifient $x^2 = y^2 + z^2$ (car 25 = 16 + 9)

Donc la proposition P est vraie.

Pour montrer qu'une proposition de la forme ∀x∈Ω/P(x) est fausse, on montre que sa négation ∃x∈Ω/nonP(x)
est vraie. C'est donner un contre-exemple.

exemple :

Soit P la proposition «$\forall n \in \mathbb{N}, n^2+1$ est un nombre premier »

Démontrez que P est fausse.

solution :

Pour démontrer que P est fausse on va montrer que nonP est vraie.

nonP est la proposition $\exists n \in \mathbb{N}, n^2+1$ n'est pas un nombre premier

Soit n=3.

$n^2 + 1 = 10$

10 n'est pas un nombre premier.

n=3 est un exemple de la proposition nonP.
n=3 est un contre-exemple de la proposition P.
Donc la proposition P est fausse.

Lois de Morgan*Morgan (1806-1871)*

$\rceil(P \text{ et } Q) \Leftrightarrow \rceil P \text{ ou } \rceil Q$

$\rceil(P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow \rceil P \text{ et } Q$

P	Q	$\rceil P$	$\rceil Q$	$\rceil(P \text{ et } Q)$	$\rceil Q$ ou $\rceil P$	$\rceil(P \text{ ou } Q)$	$\rceil Q$ et $\rceil P$
1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1

Enigme

Un chercheur se fait capturer par des cannibales (encore ces cannibales). Ils ne lui laissent pas de chance de s'en sortir (parce qu'ils ont faim), mais ce sont des Hommes bon qui n'ont qu'une seule parole. Ils lui laissent donc le choix, il a le droit à une phrase, si elle est vrai, il sera manger roti, si elle est fausse, il sera manger bouilli. Le lendemain, le chercheur s'en va du camp des cannibales sain et sauf !

Mais comment a-t-il fait ?

Les équivalences successives

Soient P ; Q **et** R **trois propositions**

Si on a $(P \Leftrightarrow Q)$ **et** $(Q \Leftrightarrow R)$ **alors** $P \Leftrightarrow R$

Et on a $(P \Leftrightarrow P_1)$; $(P_1 \Leftrightarrow P_2)$;.....**et** $(P_n \Leftrightarrow Q)$ **alors** $(P \Leftrightarrow Q)$

Exemple

1-Montrer que $\forall(a,b) \in \mathbb{R}^2$; $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b} \Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0$

Solution

on a $\forall(a,b) \in \mathbb{R}^2$

$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{a+b}\right)^2 = \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2$

$\Leftrightarrow a + b = \sqrt{a}^2 + 2\sqrt{ab} + \sqrt{b}^2$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{ab} = 0$

$\Leftrightarrow ab = 0$

$\Leftrightarrow b = 0$ **ou** $a = 0$

2-montrer que $\left(\forall n \in \mathbb{R}^+\right), \sqrt{n+6} = n \Leftrightarrow n = 3$

solution

on a $\left(\forall n \in \mathbb{R}^{+}\right)$

$\sqrt{n+6} = n \Leftrightarrow \left(\sqrt{n+6}\right)^{2} = n^{2}$

$\Leftrightarrow n+6 = n^{2}$

$\Leftrightarrow n^{2} - n - 6 = 0$

$\Leftrightarrow (n-3)(n+2) = 0$

$\Leftrightarrow n = 3$ **ou** $n+2 = 0$

$\Leftrightarrow n = 3$ (**car** $n \in \mathbb{R}^{+}$)

3−montrer que $\forall (n, y) \in \mathbb{R}^{2} \; |n-y| \leq 2\sqrt{n^{2}+y^{2}+ny}$

solution

on a $\forall (n, y) \in \mathbb{R}^{2}$

$|n-y| \leq 2\sqrt{n^{2}+y^{2}+ny}$

$\Leftrightarrow |n-y|^{2} \leq \left(2\sqrt{n^{2}+y^{2}+ny}\right)^{2}$

$\Leftrightarrow (n-y)^{2} \leq 2^{2}\left(n^{2}+y^{2}+ny\right)$

$\Leftrightarrow n^{2} - 2ny + y^{2} \leq 4n^{2} + 4y^{2} + 4ny$

$\Leftrightarrow -3n^{2} - 6ny - 3y^{2} \leq 0$

$\Leftrightarrow 3n^{2} + 6ny + 3y^{2} \geq 0$

$\Leftrightarrow n^{2} + 2ny + y^{2} \geq 0$

$\Leftrightarrow (n+y)^{2} \geq 0$

et puisqu'on a $\left(\forall (n; y) \in \mathbb{R}^{2}\right); (n+y)^{2} \geq 0$

alors $\left(\forall (n; y) \in \mathbb{R}^{2}\right); |n-y| \leq 2\sqrt{n^{2}+y^{2}+ny}$

4−resoudre dans $\mathbb{R}$ l'equation $\sqrt{n^{2}+1} = 2n$

solution

on a $D = \mathbb{R}^{+}$

$\sqrt{n^{2}+1} = 2n \Leftrightarrow n^{2}+1 = 4n^{2}$

$\Leftrightarrow 3n^{2} = 1$

$\Leftrightarrow n^{2} = \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow n = \frac{\sqrt{3}}{3}$ أو $n = \frac{-\sqrt{3}}{3}$

donc $n = \frac{\sqrt{3}}{3}$ **car** $n \in \mathbb{R}^{+}$

La contraposée

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\rceil P$	$\rceil Q$	$(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$
1	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**
1	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**
0	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**
0	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**

On deduit que
si P et Q sont deux propositions alors
P ⇒ Q équivaut à nonQ ⇒ nonP

Définition :
La proposition nonQ ⇒ nonP est appelée proposition contraposée de la proposition P ⇒ Q.

Une proposition et sa contraposée sont équivalentes, ce qui signifie que l'on peut démontrer l'une pour démontrer l'autre. On souhaite par exemple montrer que P ⇒ Q. Le raisonnement par contraposée consiste à prouver que nonQ ⇒ nonP.

Exemple :
Pour démontrer que « S'il pleut, alors le sol est mouillé »,
je peux démontrer que « Si le sol n'est pas mouillé, alors il ne pleut pas ».
Exemple :

1−montrer que $(\forall \varepsilon \rangle 0); |a| \langle \varepsilon \Rightarrow a = 0$

Solution

on a $a \neq 0 \Rightarrow (\exists \varepsilon \rangle 0); (a \leq -\varepsilon \geq 3)$

$\Rightarrow |a| \geq \varepsilon$

donc $(\forall \varepsilon \rangle 0); |a| \langle \varepsilon \Rightarrow a = 0$

2−montrer que $a + b \rangle 2c \Rightarrow \ a \rangle c$ **ou** $b \rangle c$

solution

on a $a \leq c$ **et** $b \leq c \Rightarrow a + b \leq 2c$

donc $a + b \rangle 2c \Rightarrow a \rangle c$ **ou** $b \rangle c$

3−montrer que $(n \neq 2) et (y \neq 2) \Rightarrow 2n + 2y - ny - 2 \neq 2$

solution **on a** $2n + 2y - ny - 2 = 2$

$\Rightarrow 2n - ny + 2y - 4 = 0$

$\Rightarrow n(2 - y) + 2(y - 2) = 0$

$\Rightarrow (y - 2)(2 - n) = 0$

$\Rightarrow y - 2 = 0$ **ou** $2 - n = 0$

$\Rightarrow y = 2$ **ou** $n = 2$

donc $n \neq 2 \ \ et \ \ y \neq 2 \ \Rightarrow 2n + 2y - ny - 2 \neq 2$

Le raisonnement par l'absurde

Ce raisonnement repose sur le principe du Tiers-exclus, à savoir que si une proposition n'est pas fausse, alors elle est vraie.

Imaginons par exemple que vous savez que quelque chose est vrai, mais vous ne savez pas le démontrer. En raisonnant par l'absurde vous allez commencer par admettre par hypothèse que cette chose est fausse. Puis en suivant les règles de la logique vous allez développer les conséquences de cette hypothèse et aboutir à une contradiction irréfutable (comme 1 = 2, ou 2 et 4 sont premiers entre eux). Vous allez en déduire que votre hypothèse de départ est nécessairement fausse, c'est à dire que la chose que vous vouliez démontrer n'est pas fausse, donc qu'elle est vraie.

Définition :
Le raisonnement par l'absurde est une forme de raisonnement logique. Il consiste

- **soit à démontrer qu'une proposition A est vraie en prouvant l'absurdité de la proposition nonA**
- **soit à démontrer qu'une proposition A est fausse en déduisants logiquement des conséquences absurdes**

Exemple1:montrons l'irrationnalité de $\sqrt{2}$ **;** $\sqrt{2} \notin Q$
On souhaite démontrer que la proposition P est vraie.

P:« $\sqrt{2}$ **est un nombre irrationnel »**
On raisonne par l'absurde. On va donc montrer que la proposition nonP est absurde.
nonP se traduit par « $\sqrt{2}$ **est un nombre rationnel »**
$\sqrt{2}$ **est rationnel, il peut se mettre sous la forme d'une fraction.**
C'est à dire$\exists a \in \mathbb{Z}, \exists b \in \mathbb{Z}, \sqrt{2} = a/b$ **avec a et b premiers entre eux.**
On simplifie cette égalité :
$\exists a \in \mathbb{Z}, \exists b \in \mathbb{Z}, 2 = a^2/b^2$ **(on élève au carré)**
Donc $\exists a \in \mathbb{Z}, \exists b \in \mathbb{Z}, 2b^2 = a^2$ **(par produit de** b^2**)**
Donc a^2 **est pair, donc a est pair**

Donc $\exists k \in \mathbb{Z}, a = 2k$
En remplaçant dans l'égalité précédente, on obtient $\exists a \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z}, 2b^2 = (2k)^2$
donc $\exists a \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z}, 2b^2 = 4k^2$
donc $\exists a \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z}, 2b^2 = (2k)^2$
donc $\exists a \in \mathbb{Z}, \exists k \in Z, 2b^2 = 4k^2$
donc $\exists a \in Z, \exists k \in Z, b^2 = 2k^2$**.**
Donc b^2 **est pair, donc b est pair ce qui est impossible car a est pair et que a et b sont premiers entre eux.**
On aboutit à une contradiction.
Donc la proposition nonP est fausse.

Donc $\sqrt{2}$ **est un nombre irrationnel**
Dans le cas où la proposition à démontrer est de la forme P ⇒ Q, raisonner par l'absurde consiste à démontrer que la proposition (P et nonQ) est fausse. Pour se faire, on suppose que P est vraie et que Q est fausse, on développe les conséquences et on montre que l'on arrive à une contradiction.

Exemple2 :

Démontrez que si vous rangez *(n+1)* pulls dans n tiroirs distincts, alors il y a au moins un tiroir contenant 2 pulls.

solution

On résonne par l'absurde.

Supposons qu'il n'y a aucun tiroir contenant 2 pulls ou plus.
Cela signifie que tous les tiroirs contiennent soit 1 pull soit 0 pull.

Il faudrait donc au minimum n+1 tiroirs pour ranger n+1 pulls.
Ce qui est absurde puisque l'on ne dispose que de n tiroirs.

Donc il y a au moins un tiroir contenant 2 pulls.

Conclusion

Pour montrer que la proposition (P) est vrai on suppose que (nonP) est vrai

Et que $nonP \Rightarrow nonQ$ **est vrai avec (Q) vrai ce qui est contradictoire**

Donc (P) est vrai

Raisonnement par disjonction des cas

Exemple1

montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ **le nombre** $n^3 - n$ **est divisible par 3**

1°cas $3k = n$ **avec** $k \in \mathbb{N}$

on a $n^3 - n = n(n^2 - 1)$

$= n(n-1)(n+1)$

$= 3k(3k-1)(3k+1)$

donc $n^3 - n$ **Est divisible par 3**

2°cas $n = 3k+1$ **avec** $k \in \mathbb{N}$

on a $n^3 - n = n(n-1)(n+1)$

$= (3k+1)(3k \times (3k+2))$

donc $n^3 - n$ **Est divisible par 3**

3°cas $n = 3k+2$ **avec** $k \in \mathbb{N}$

$n^3 - n = n(n-1)(n+1)$

$= (3k+2)(3k+1)(3k+3)$

$= 3(3k+2)(3k+1)(k+1)$

donc $n^3 - n$ **Est divisible par 3**

par conséquence $n^3 - n$ **Est divisible par 3 pour tout entier naturel n**

Exemple2

Resoudre dans $\mathbb{R}$ **l'equation** $(E_m): mx^2 - 2x + 1 = 0$ **suivant avaleur de m**

Solution

1cas : m=0

On a $(E_0) \Leftrightarrow -2x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2x=1$

$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

donc $S_0=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

2 cas : $m\neq 0$

on a $\Delta=4-4m$

$=4(1-m)$

2 cas 1 : $m=1$

on a : $\Delta=0$

donc l'equation (E_1) **a une solution unique dans** $\mathbb{R}$

$x_0=\frac{1}{m}=1$

donc $S_1=\{1\}$

2cas 2 : $m\rangle 1$

on a $\Delta\langle 0$

donc $S_m=\varnothing$

2cas 3 : $m\neq 0$ **et** $m\langle 1$

on a $\Delta\rangle 0$

donc l'equation (E_m) **a deux solutions dans** $\mathbb{R}$

$x_1=\frac{1-\sqrt{1-m}}{m}$ **et** $x_2=\frac{1+\sqrt{1-m}}{m}$

donc $S_m=\left\{\frac{1-\sqrt{1-m}}{m};\frac{1+\sqrt{1-m}}{m}\right\}$

Exemple3

resoudre dans $\mathbb{R}$ **l'inequation** $I:|x-1|+2x-3\geq 0$

1 cas : $x\in[1;+\infty[$ ، $x\geq 1$

on a $\forall x\in]-\infty;1[;I\Leftrightarrow x-1+2x-3\geq 0$

$\Leftrightarrow 3x-4\geq 0$

$\Leftrightarrow x\geq\frac{4}{3}$

donc $S_1=\left[\frac{4}{3};+\infty\right[$

2cas : $x\in]-\infty;1[,x\langle 1$

on a $\forall x\in]-\infty;1[;I\Leftrightarrow 1-x+2x-3\geq 0$

$\Leftrightarrow x-2\geq 0$

$\Leftrightarrow x\geq 2$

donc $S_2 =]-\infty;1[\cap [2;+\infty[$

donc $S_2 = \varnothing$

Le raisonnement par récurrence

Définition :

Un raisonnement par récurrence permet de montrer qu'une propriété est vraie ou qu'elle est fausse pour tous les entiers à partir d'un certain "rang".

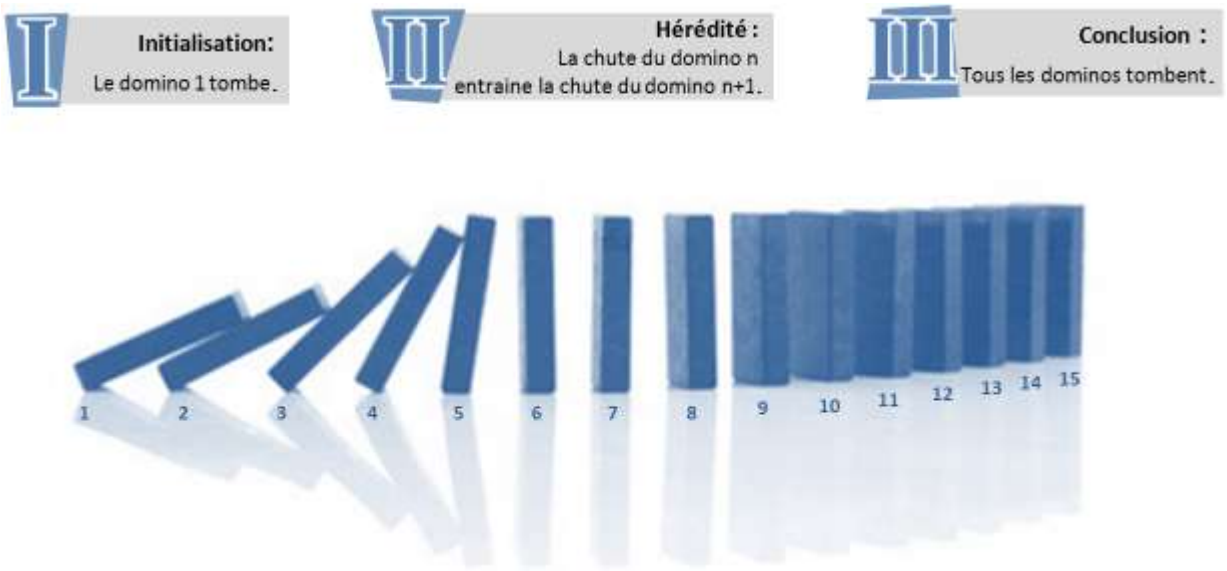
La forme générale des propriétés que nous allons démontrer par récurrence est :

$(\forall n \in N) n \geq k, P(n)$

Pour se faire il faudra démontrer les deux points si dessous :

- $P(k)$ C'est l'initialisation. On montre que la propriété est vérifiée au rang k.
- $(\forall n \in N) n \geq k, P(n) \Rightarrow P(n+1)$ C'est l'hérédité. On montre que si la propriété est vraie au rang n, alors elle est vraie au rang n+1. (On montre une implication)

Pour terminer la démonstration, il suffit alors d'indiquer que d'après le principe de récurrence, ces deux conditions prouvent la propriété $(\forall n \in N) n \geq k, P(n)$.



Le principe de récurrence

exemple1

montrer que : $a \in \mathbb{R}^+; \forall n \in \mathbb{N}; (1+a)^n \geq 1+na$

solution

pour $n = 0$

on a $(1+a)^0 = 1$

et $1+na=1$

donc $(1+a)^0 \geq 1+0a$

donc la proposition est vrai pour $n=0$

pour $n \in \mathbb{N}$

on suppose que $(1+a)^n \geq 1+na$ **(HR)**

montrons que $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$

on a $(1+a)^n \geq 1+na$ **(hypothèse de récurrence)**

$\Rightarrow (1+a)^{n+1} \geq (1+na)(1+a)$

$\Rightarrow (1+a)^{n+a} \geq 1+a+na+na^2$

$\Rightarrow (1+a)^{n+1} \geq 1+a(1+n)+na^2$

on a $1+a(1+n)+na^2 \geq 1+a(1+n)$

donc $(1+a)^{n+1} \geq 1+a(1+n)$

donc d'après le principe de récurrence on déduit que

$(\forall n \in \mathbb{N}), (1+a)^n \geq 1+na$

Exemple2

montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1+3+3^2+....+3^{n-1} = \dfrac{3^n-1}{2}$

Solution

pour $n=1$

on a $1=\dfrac{3^1-1}{2}$

pour $n=2$ **on a** $1+3=\dfrac{3^2-1}{2}$

pour $n=3$ **on a** $1+3+3^2=\dfrac{3^3-1}{2}$

pour $n \in \mathbb{N}^*$

on suppose que $1+3+3^2+...+3^{n-1}=\dfrac{3^n-1}{2}$ (HR)

$1+3+3^2+...+3^{n-1}+3^n=\dfrac{3^{n+1}-1}{2}$

on a $1+3+3^2+...+3^{n-1}=\dfrac{3^n-1}{2}$

$\Rightarrow 1+3+3^2+...+3^{n-1}+3^n=\dfrac{3^n-1}{2}+3^n$

$\Rightarrow 1+3+3^2+3^3+...+3^n=\dfrac{3^n-1+2-3^n}{2}$

$\Rightarrow 1+3+3^2+...+3^n=\dfrac{3^{n+1}-1}{2}$

donc d'après le principe de récurrence on déduit que $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right),1+3+3^2+...+3^{n-1}=\frac{3^n-1}{2}$

exemple3

montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*,1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$

solution

pour $n=1$ **on a** $1=\frac{1(1+1)}{2}$

pour $n=2$ **on a** $1+2=\frac{2(2+1)}{2}$

$3=3$

pour $n\in\mathbb{N}^*$ **On suppose que** $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$

et on montre que $1+2+3+...+n+1=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

on a $1+2+3+n=\frac{n(n+1)}{2}(HR)$

$\Rightarrow 1+2+3+...+n+1=\frac{n(n+1)}{2}+n+1$

$\Rightarrow 1+2+3+...+n+1=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$

$\Rightarrow 1+2+3+...+n+1=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

donc d'après le principe de récurrence on déduit que $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right),1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$

exemple4

montrer que $(\forall n\in\mathbb{N}),\frac{n^3+3n^2+2n}{6}\in\mathbb{N}$

solution

pour n=0 on a $\frac{0}{6}=0\in\mathbb{N}$

pour n=1 ona $\frac{1+3+2}{6}=1\in\mathbb{N}$

pour $n\in\mathbb{N}$

on suppose que : $\frac{n^3+3n^2+2n}{6}\in\mathbb{N}$

et on montre que : $\frac{(n+1)^3+3(n+1)^2+2(n+1)}{6}\in\mathbb{N}$

on a $\frac{(n+1)^3+3(n+1)^2+2(n+1)}{6}=\frac{n^3+3n^2+3n+1+3n^2+6n+3+2n+2}{6}$

$=\frac{n^3+3n^2+2n+3n^2+9n+6}{6}$

$$=\frac{n^3+3n^2+2n}{6}+1+\frac{9n+3n^2}{6}$$

$$=\frac{n^3+3n^2+2n}{6}+1+\frac{n^2+3n}{2}$$

et puisque $n(n+3)$ **Est paire**

alors $\frac{n(n+3)}{2}\in\mathbb{N}$

et d'après l'hypothèse de récurrence on a $\frac{n^3+3n^2+2n}{6}+1+\frac{n(n+3)}{2}\in\mathbb{N}$ $\frac{n^3+3n^2+2n}{6}\in\mathbb{N}$

donc $\frac{(n+1)^3+3(n+2)^2+2(n+1)}{6}\in\mathbb{N}$

donc d'après le principe de récurrence on déduit que $(\forall n\in\mathbb{N}),\frac{n^3+3n^2+2n}{6}\in\mathbb{N}$