Exercices (les integrales) 2018/2019

Exercice1 calculer les intégrales suivantes

$\int_1^2\left(\frac{3x^2+x-1}{x^2}\right)dx$ ، $\int_1^{ln2}\left(x^2-\sqrt{2}x\right)dx$ ، $\int_0^1(2x-1)dx$

$\int_0^1\left(e^{2x}-e^x\right)dx$ ، $\int_0^1 e^{-x}\left(e^{-x}+1\right)dx$ ، $\int_1^2\left(4x^3+x-1\right)dx$ ، $\int_0^1 e^{-x}dx$ ، $\int_1^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}\right)dx$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sqrt{\sin x}\cos x\right)dx$ ، $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)dx$ ، $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{cox^2x}\right)$ ، $\int_{ln3}^{ln3}\frac{\left(e^x-1\right)^2}{e^x}dx$ ، $\int_0^{ln2}\left(\frac{e^{2x}+e^x+1}{e^x}\right)dx$

$\int_0^{\pi}\cos x.\sin^2 x\,dx$ ، $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\sin x)dx$ ، $\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin 2x.\cos x dx$ ، $\int_0^{\pi}\cos x.\cos 2x dx$ ، $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin x}{\cos^4 x}\right)dx$

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\cos\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)dx$ $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos^3 x\right)dx$ ، $\int_0^1\sqrt[3]{x}\,(x+1)dx$ ، $\int_1^2\left(x+\frac{1}{x}\right)dx$ ، $\int_0^1\left(2^{5x}\right)dx$ ، $\int_0^{\pi}\sin x.\cos^3 x\,dx$

$\int_1^3\frac{|x-2|}{\left(x^2-4x\right)^2}dx$ ، $\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{1}{x}|lnx|\,dx$ ، $\int_3^4\frac{x^2+x-2}{x^3-2x^2}$ ، $\int_1^2\frac{x}{\left(3x^2-2\right)^3}dx$ ، $\int_1^2\frac{x^2-2x}{\sqrt{3x^2-x^3}}dx$ ، $\int_{-1}^1\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}dx$ ،

$\int_1^2\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$ ، $\int_1^2\left(x+\frac{1}{x^2}\right)dx$ ، $\int_0^1 x\sqrt{3+x^2}\,dx$ ، $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}}|\sin 2x|dx$ ، $\int_{-1}^1\left|e^x-1\right|dx$ ، $\int_{-1}^3\left|x^2-2x\right|dx$

$\int_0^{\pi}\left(\cos^3\theta\right)d\theta$. $\int_1^e\frac{(1+lnx)^2}{x}dx$ ، $\int_1^e\frac{lnx}{x}dx$ ، $\int_0^1 x\left(x^2+2\right)^4 dx$ ، $\int_0^1\frac{x^2}{\left(x^3+1\right)^2}dx$ ، $\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

$\int_0^{\pi-3}\frac{\sin\theta}{\cos^3\theta}d\theta$

Exercice2

1−Montrer que $\cos^4 x=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$ **puis calculer** $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos^4 x\right)dx$

2−Montrer que $\cos^4 x-\sin^4 x=\cos 2x$ **puis calculer** $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin^4 x\right)dx$

Exercice3

On considère les intégrales $I=\int_0^{\pi}\cos^2 xdx$ **et** $J=\int_0^{\pi}\sin^2 xdx$

Calculer I+J et I-J puis déduire I et J

exercice4

Rappel

$\int_a^b(f+g)(x)\,dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$ $\qquad$ $\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx$

1−Calculer les intégrales suivantes

$\int_1^3\left|x^2-2x\right|dx$ ** $\int_1^{\frac{\pi}{6}}\sin(2t)dt-\int_1^{\frac{7\pi}{6}}\sin(2t)dt$ ** $\int_2^3 ln(1+t)dt+\int_3^2 ln(1+t)dt$

$\int_1^e 2t+lnt.dt+\int_1^e\frac{1+lnx}{x}dx$

2-si $d°P \geq d°Q$ **alors pour calculer** $\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ **on fait la division euclidienne de** $P(x)$ **par** $Q(x)$

Calculer les intégrales ، $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3+x+1}{x-1}dx$ ، $\int_1^2 \frac{x^2+5x-3}{x}dx$ ، $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^3+2x+1}{x+1}dx$

3- intégration par parties $\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x).g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)$

Calculer les intégrales

$\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{ln(x)}{x^2}dx$ ، $\int_1^e (lnx)^2 dx$, $\int_0^1 x^9 e^{x^5} dx$ ، $\int_{-1}^0 x^5 e^{x^3} dx$ ، $\int_{-1}^0 x\sqrt{4-x}\, dx$ ، $\int_1^e x\, ln\, x\, dx$ ، $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\, dx$

$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx$ ، $\int_0^{e-1} (x+1)^2 ln(x+1)dx$ ، $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\left(ln(1+\cos x)\right)dx$

4-rappel $\int_a^b u^r(x)u'(x)dx = \left[\frac{u^{r+1}(x)}{r+1}\right]_a^b \qquad r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$

Calculer les intégrales

، $\int_1^e \left(\frac{ln^2(x)}{x}\right)dx$ ، $\int_0^3 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3x+5}}dx$ ، $\int_2^3 \sqrt{4x-1}dx$ ، $\int_0^1 x\left(x^2+\sqrt{6}\right)^4 dx$ ، $\int_1^2 \left(x^2+\sqrt[3]{x}\right)dx$

$\int_0^{\pi} (1+\sin x)^3 \cos x dx$ $\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(1-coxx)^2}dx$

5-rappel($\int_a^b \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \left[ln|u(x)|\right]_a^b$

Calculer les intégrales

$\int_0^{\pi} \left(\frac{\sin 2x}{4+\cos^2 x}\right)dx$ ، $\int_0^1 \frac{x}{x+1}dx$ ، $\int_{-1}^{-2} \frac{x-1}{x^2-2x}dx$ ، $\int_0^{ln2} \frac{e^x}{1+e^x}dx$ ، $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\tan x)dx$

6-rappel ($\int_a^b u'(x).e^{u(x)}dx = \left[e^{u(x)}\right]_a^b$

Calculer les intégrales

$\int_{1/2}^1 \frac{5+e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$ ، $\int_1^4 \frac{e^{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ ، $\int_0^1 xe^{x^2+1}dx$ ، $\int_0^1 e^{6x+1}dx$

Exercice5

On considère les intégrales $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$ **et** $J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx$ **et** $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}dx$

1- on considère la fonction f **définie sur** $[0;1]$ **par** $f(x) = ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)$ **; calculer** $f'(x)$

2-a-verifier que $J + 2I = K$

b-par une intégration par partie sur K montrer que $K = \sqrt{3} - I$

c-déduire K et J

exercice6

1-a-determiner a et b tel que $\left(\forall x \in \mathbb{R}^*\right)\dfrac{1}{e^x-1}=a+\dfrac{be^x}{e^x-1}$

b- déduire le calcul de $I=\int_{ln2}^{ln3}\dfrac{dx}{e^x-1}$

2-a-determiner a et b tel que $\left(\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1;2\}\right)\dfrac{1}{x^2-3x+2}=\dfrac{a}{x-2}+\dfrac{b}{x-1}$

b- déduire le calcul de $J=\int_{-1}^{0}\dfrac{dx}{x^2-3x+2}$

exercice7

On considère l'intégral $I_n=\int_0^1 x^n e^x dx$ **pour** $n \in \mathbb{N}$

1-calculer I_1

2-montrer par intégration par partie que $\left(\forall \in \mathbb{N}\right): I_{n+1}=e-\left(n+1\right)I_n$

3- calculer I_2 **et** I_3

4-deduire la valeur de l'intégrale $\int_0^1\left(x^3+2x^2-2x\right)e^x dx$

Exercice8

Soit la suite $\left(u_n\right)_{n\geq 1}$ **définie par** $u_n=\int_0^2\left(\dfrac{2t+3}{t+2}\right)e^{\frac{t}{n}}dt$

1-soit φ **la fonction définie sur** $[0;2]$ **par** $\varphi(t)=\dfrac{2t+3}{t+2}$

Étudier les variation de la fonction φ **sur** $[0;2]$

2- déduire que $\dfrac{3}{2}n\left(e^{\frac{2}{n}}-1\right)\leq u_n \leq \dfrac{7}{4}n\left(e^{\frac{2}{n}}-1\right)$

Exercice9

Soit f **la fonction définie sur** $\mathbb{R}$ **par** $f\left(x\right)=\dfrac{1+e^{2x}}{\left(1+e^x\right)^2}$ **et** $\left(C_f\right)$ **sa représentation dans le plan rapporte au repère orthonormée** $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$

1-montrer que la fonction f **est paire et vérifier que** $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=1$

2-sachant que $f'(x)=\dfrac{2e^x\left(e^x-1\right)}{\left(1+e^x\right)^3}$ **étudier le signe de** $f'(x)$ **et donner le tableau des variations**

3-soit $\left(x\in\mathbb{R}\right);F\left(x\right)=\dfrac{-2e^x}{1+e^x}+x$ **calculer** $F'\left(x\right)$

4-calculer la surface du domaine limite par $\left(C_f\right)$ **et les droites d'équations** $y=1$ **;** $x=Ln2$ **; et** $x=-Ln2$

Exercice10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases} xe^{\frac{x^2}{2}+1} & x\leq 0 \\ \frac{x+2}{x}e^{-\frac{x}{2}} & x\succ 0\end{cases}$ et (C_f) sa représentation dans le plan rapporte au repère orthonormée $(o,\vec{i},\vec{j})$

1–a– vérifier que $F(x)=-\frac{x+4}{x}e^{-x}$ est une primitive de f^2 sur $\mathbb{R}^{+*}$

b– soit $\lambda\succ 1$ calculer en cm^3 le volume $V(\lambda)$ du solide de révolution engendré par la rotation autour de Ox de la surface limitée par le graphique (C_f) de f et l'axe des x et les droites $x=1$ et $x=\lambda$

Calculer $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}V(\lambda)$

2-calculer en cm^3 la surface du domaine situer entre (C_f) ; l'axe des x ; l'axe des y et la droite (x=1)

Exercice11

Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{1}{x}+lnx$ et (C_f) sa représentation graphique dans le plan rapporte au repère orthonormée $(o,\vec{i},\vec{j})$

1–calculer $A=\int_1^e\frac{dx}{x}$ et $B=\int_1^e(lnx)dx$

2– calculer la surface du domaine limite par (C_f); l'axe des x et les droites $x=1$ sur $x=e$

3–montrer que $F(x)=x\left[(lnx)^2-2lnx+2\right]$ est une fonction primitive de la fonction $g(x)=(lnx)^2$

4-soit $\lambda\in]0;1[$

a–calculer $C=\int_\lambda^1\left(\frac{lnx}{x}\right)dx$ et $D=\int_\lambda^1(lnx)^2dx$

b– calculer en fonction de λ ; le volume $V(\lambda)$ engendrer par la rotation autour de l'axe des x de la courbe de la restriction de f sur $[\lambda;1]$ puis calculer $\lim\limits_{\lambda\to0^+}V(\lambda)$