CALCUL INTÉGRAL

Primitives d'une fonction

1) Définition

> **Soit *f* une fonction définie sur un intervalle *I* de ℝ.**
> **On appelle primitive de *f* sur *I* toute fonction *F* dérivable sur *I* dont la dérivée est *f*. Autrement dit, pour tout *x* de *I*, $F'(x) = f(x)$.**

Quelques exemples

- $f(x) = 4$ une fonction primitive F est définie par $F(x) = 4x$. En effet la dérivée de F est bien f.

Une autre primitive de la fonction f définie par $f(x) = 4$ est la fonction F_1 définie par $F_1(x) = 4x + 5$.
Remarquons donc qu'une fonction admet plusieurs primitives.

- Une primitive de la fonction définie par $f(x) = 2x$ est la fonction définie par $F(x) = x^2 + c$.

2) Existence d'une primitive

Théorème

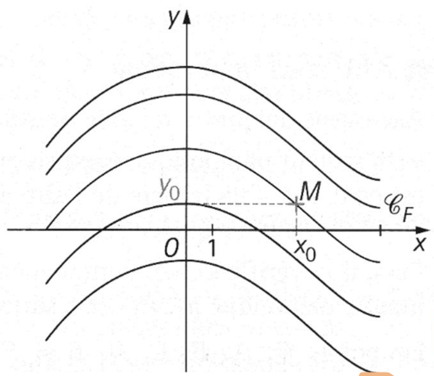
> **Toute fonction continue sur un intervalle *I* admet une primitive sur cet intervalle.**

3) Ensemble des primitives d'une fonction définie sur un intervalle

Théorème

> **Si *F* est une primitive de *f* sur un *intervalle I*, alors toutes les primitives de *f* sur *I* sont les fonctions *G* définies sur *I* par :**
> $G(x) = F(x) + k$
> **où *k* est un nombre réel.**

Autrement dit, deux primitives d'une même fonction définie sur un intervalle *I* diffèrent d'une constante.



4) Primitive vérifiant une condition

Théorème

> **Soit x_0 un réel de l'intervalle *I* et y_0 un réel quelconque.**
> **Si *f* est une fonction admettant des primitives sur *I*, alors il existe une unique primitive *G* de *f* sur *I* prenant la valeur y_0 en x_0 c'est-à-dire telle que $G(x_0) = y_0$.**

***F* étant une primitive de *f* sur *I*, les courbes de toutes les autres primitives de *f* sur *I* se déduisent de celle de *F* par une tranlation de vecteur $k\vec{j}$ où *k* est un réel quelconque.**
Un point $M(x_0 ; y_0)$ étant donné, il n'existe qu'une seule courbe de la famille passant par ce point.

Exemples

Trouvons la primitive F de f définie sur ℝ par $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$ qui vaut -2 en 3.

Une primitive est de façon évidente $F(x) = x^3 + x^2 - 5x + C$.

La condition se traduit par $F(3) = -2$ soit $27 + 9 - 15 + C = -2$ d'où l'on tire $C = -23$.

5) Primitives de f + g et de kf, avec k réel

- F et G sont des primitives respectives des fonctions f et g sur un intervalle I.

Alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.

- F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I et k est un nombre réel.

Alors kF est une primitive de kf sur I.

- une primitive d'un produit de fonctions n'est pas le produit des primitives.

De même, pour le quotient de deux fonctions.

- **Recherche de primitives**

1) Primitives des fonctions usuelles

fonction définie par $f(x)$ =	une primitives donnée par $F(x)$ =	sur I =
a	ax	$\mathbb{R}$
x^n n entier naturel	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	sur $\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n}$ n entier naturel > 1	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$	sur $]-\infty\ ;\ 0[$ ou sur $]0\ ;\ +\infty[$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	sur $]-\infty\ ;\ 0[$ ou sur $]0\ ;\ +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$	sur $]0\ ;\ +\infty[$
e^x	e^x	sur $\mathbb{R}$
x^r	$\frac{1}{r+1}x^{r+1}+c$	$r \neq -1$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}.x^{\frac{3}{2}}+c$	
$\cos x$	$\sin x$	
$\sin x$	$-\cos x$	
$1+tg^2x$	tgx	$x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cos(x+b)$	$a \neq 0$
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$	$a \neq 0$

2) Primitives des formes usuelles

Dans le tableau suivant, *u* désigne une fonction dérivable sur un intervalle *I*.

fonction f	primitive F	condition
$u'u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	n entier naturel
$\frac{u'}{u^n}$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$	n entier > 1 u ne s'annule pas sur I
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$	u ne s'annulant pas sur I
$\frac{u'}{u}$	$\ln u$	u strictement positive sur I
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\lvert u(x)\rvert+c$	$u(x) \neq 0$
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)}+c$	u définie sur I

Calcul Intégral

1-Intégrale d'une fonction

1) Définition de l'intégrale

Intégrale d'une fonction f entre a et b

> On considère une fonction f continue sur un intervalle I et a et b deux réels de I.
> Soit F une primitive de f sur l'intervalle I.
> On appelle *intégrale de f entre a et b* le nombre réel $F(b) - F(a)$.
> On note ce nombre $\int_a^b f(x)\,dx$, que l'on lit « integrale de a à b de $f(x)\,dx$ ».

Ainsi, calculons $\int_0^1 x^2\,dx$. Une primitive de $f(x) = x^2$ est $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Par suite :

$$\int_0^1 x^2\,dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{3}.$$

Remarques

- Notons que si F et G sont deux primitives de f sur l'intervalle I, on sait qu'elles diffèrent d'une constante. Par suite :

$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$$

Donc, dans le calcul de $\int_a^b f(x)\,dx$, le résultat sera le même quelle que soit la primitive choisie de f sur I.

- Une intégrale est un nombre réel, indépendant de la variable x qui figure pourtant dans son écriture. Autrement dit :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(\theta)d\theta$$

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

exemple calculer les integrales suivantes $\int_0^2 x^2dx$, $\int_1^4 \frac{1}{x}dx$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$

2) Propriétés immédiates

$$\int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0$$
$$\int_b^a f(x)\,dx = F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a)) = -\int_a^b f(x)\,dx$$

3) Positivité de l'intégrale

Théorème

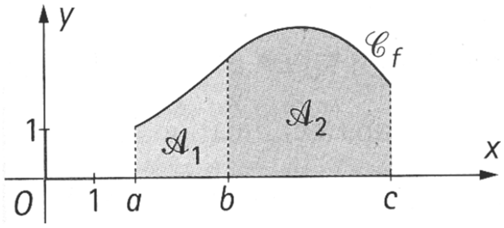
> Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux réels de I tels que $a \leq b$
>
> Si, pour tout x de $[a\,;b]$, on a $f(x) \leq 0$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \leq 0$.

- ## Propriétés de l'intégrale

1) Relation de Chasles

> Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b, c trois réels de I.
> Alors $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$

L'interprétation en termes d'aire, dans le cas où *f* est positive est immédiate...



2) Linéarité de l'intégrale.

Intégrale d'une somme de fonctions

> **Soit *f* et *g* deux fonctions intégrables sur un intervalle *I* et *a* et *b* deux réels de *I*.**
> **Alors :** $\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx.$

Intégrale de *kf* avec *k* réel fixé

> **Soit *f* une fonction intégrable sur un intervalle *I* et *a* et *b* deux réels de *I*.**
> **Alors :** $\int_a^b k\, f(x)\, dx = k \int_a^b f(x)\, dx.$

*** *rien n'est dit sur l'intégrale du produit de deux fonctions...*

3) Ordre

Théorème

> **Soit *f* et *g* deux fonctions continues sur un intervalle *I* et *a* et *b* deux réels de *I* avec $a \,\mathbb{C}\, b$.**
> **Si pour tout *x* de [*a* ; *b*], on a $f(x) \leq g(x)$, alors** $\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx.$

application1 **on concidere la suite definie par** $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$

1- montrer que (U_n) est decroissante minorée

2 - deduire que (U_n) est convergente et que sa limite est nulle

Application2 calculer les integrales suivantes

$$I_1 = \int_1^3 \left(3x^2 + 2x\right) dx \qquad I_2 = \int_0^2 |x-1|\, dx$$

$$I_3 = \int_0^4 \left(x^2 + x - 1\right) dx \qquad I_4 = \int_0^{-1} \frac{1}{(x-1)^2} dx$$

$$I_5 = \int_2^3 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \qquad I_6 = \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{5-3x}} dx$$

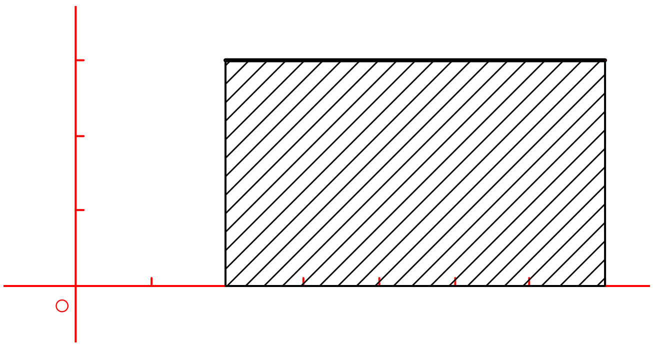
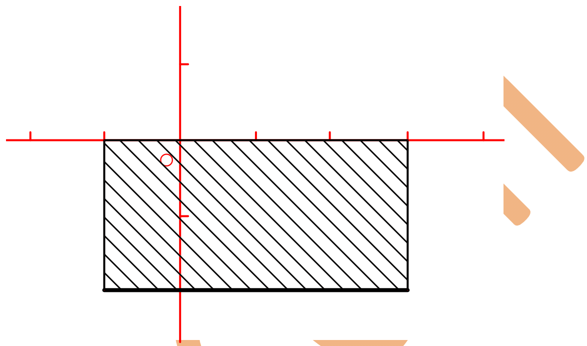
$$I_7 = \int_2^5 \frac{1}{x} dx \qquad I_8 = \int_0^2 \frac{1}{x+1} dx$$

$$I_9 = \int_1^3 \frac{4}{1-5x} dx \qquad I_{10} = \int_2^1 \left(e^{2t} + 2e^t - 3\right) dt$$

$$I_{11} = \int_2^1 \left(\frac{1}{t^2} + \frac{2}{t} - 3\right) dt \qquad I_{12} = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx$$

$$I_{13} = \int_0^3 \left|x^2 - 3x + 2\right| dx$$

2. interpretation geometrique de $\int_a^b f(x)\,dx$

Exemple 1	Exemple 2
f est définie sur [2 ; 7] par $f(x) = 3$.  $\mathrm{I} = \int_2^7 f(x)\,dx = \int_2^7 3\,dx = 3 \times (7 - 2) = 15$ **Remarque**. f admet pour primitive sur [2 ; 7] les fonctions F définies par $F(x) = 3x + c$. On remarque que $F(7) - F(2) = 3 \times 7 - 3 \times 2 = 15$ $\mathrm{I} = \int_2^7 f(x)\,dx = F(7) - F(2) = \left[F(x)\right]_2^7$	g est définie sur [– 1 ; 3] par $g(x) = -2$.  $\mathrm{J} = \int_{-1}^3 g(x)\,dx = \int_{-1}^3 -2\,dx = -2 \times [3 - (-1)] = -8$ **Remarque**. g admet pour primitive sur [– 1 ; 3] les fonctions G définies par $G(x) = -2x + c$. $G(3) - G(-1) = -2 \times 3 - (-2) \times (-1) = -6 - 2 = -8$ $\mathrm{J} = \int_{-1}^3 g(x)\,dx = G(3) - G(-1) = \left[G(x)\right]_{-1}^3$

Définition.

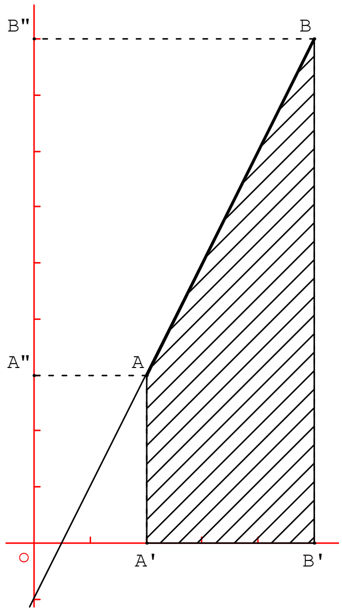
L'intégrale d'une fonction constante $f : x \longmapsto k$ sur un intervalle [a ; b] est **le nombre réel** I représentant la mesure de **l'aire algébrique** du domaine compris entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$.

On le note $\mathrm{I} = \int_a^b f(x)\,dx$.

Dans le cas de notre fonction constante f on a : $\mathrm{I} = \int_a^b f(x)\,dx = k \times (b - a)$.

Exemple3 : Intégrale d'une fonction affine.

Exemple. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 1$. Calculons le réel $A = \int_2^5 f(x)\,dx$



$$I = \int_2^5 f(x)\,dx = \int_2^5 (2x-1)\,dx = \text{Aire}(AA'B'B)$$

Le polygone AA'B'B est un trapèze donc

$$I = \frac{(AA' + BB') \times A'B'}{2} = \frac{(3+9)\times 3}{2} = 18$$

Remarque.

f admet pour primitive sur [2 ; 5] les fonctions F définies par $F(x) = x^2 - x$ + cste.

$F(5) - F(2) = 5^2 - 5 - (2^2 - 2) = 18.$

Conclusion :

$$I = \int_2^5 f(x)\,dx = F(5) - F(2) = \left[F(x)\right]_2^5$$

Le cas generale : Intégrale d'une fonction positive

Définition.

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle ouvert $I = [a,b]$, F l'une de ses primitives

On appelle intégrale de f entre a et b, le nombre réel I = F(b) – F(a) noté $\int_a^b f(x)\,dx$ ou $\left[F(x)\right]_a^b$

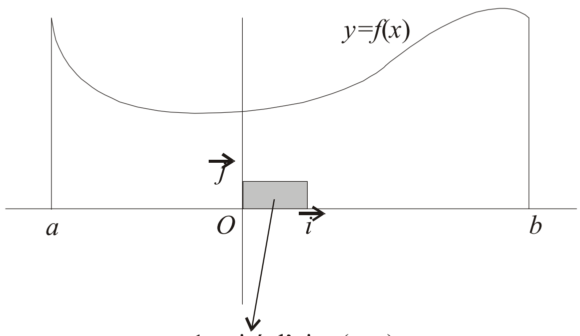
$\int_a^b f(x)\,dx$ se lit « somme de a à b de $f(x)$ dx » ou « intégrale de a à b de $f(x)$ dx

et représente la mesure de **l'aire algébrique** du domaine compris entre la courbe l'axe des abscisses et les droites d'équation
x = a et x = b pris dans cet ordre.

Lien entre intégrale et aire

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle [a ; b].

On considère le domaine limité par :
la courbe C_f d'équation $y = f(x)$
l'axe des abscisses d'équation $y = 0$
les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$.



1 unité d'aire (u.a.)

L'aire de ce domaine, exprimée en unité d'aire, est égale à l'intégrale de f entre a et b. Dans un repère orthogonal, l'unité d'aire est l'aire du rectangle hachuré sur la figure précédente.

3- Intégration par Parties

soit f et g deux fonctionsderivables sur $I = [a,b]$

on a $\quad \forall x \in I \quad (f.g)'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$

donc $\quad f'(x).g(x) = (f.g)'(x) - f(x).g'(x)$

donc $\int_a^b f'(x).g(x)dx = \int_a^b (f.g)'(x)dx - \int_a^b f(x).g'(x)dx$

donc $\int_a^b f'(x).g(x)dx = \left[f.g(x)\right]_a^b - \int_a^b f(x).g'(x)dx$

<u>Propriété</u>

> **Soit *u* et *v* deux fonctions dérivables sur un intervalle I , dont les dérivées *u'* et *v'* sont continues sur I.**
> **Soit *a* et *b* deux éléments de I . On a :**
>
> $$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,dt = \left[u(t)\,v(t)\right]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,dt^*$$
>
> $$\int_a^b f'(x).g(x)dx = \left[f(x).g(x)\right]_a^b - \int_a^b f(x).g'(x)dx$$

<u>Exemple :</u> Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$

Posons $u(x) = x$ $\quad v'(x) = \cos x$

$u'(x) = 1 \quad v(x) = \sin x$

Les fonctions *u* et *v* sont dérivables et leurs dérivées sont continues sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$ **. On a alors :**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = \left[x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \left[x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[x\sin x + \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} - (0\sin 0 + \cos 0) = \frac{\pi}{2} - 1$$

Application calculer les integrales suivantes

$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x\,dx \qquad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$

$I_4 = \int_0^1 xe^x\,dx \qquad I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(x^2 + x + 1\right)\cos\frac{x}{2}\,dx$

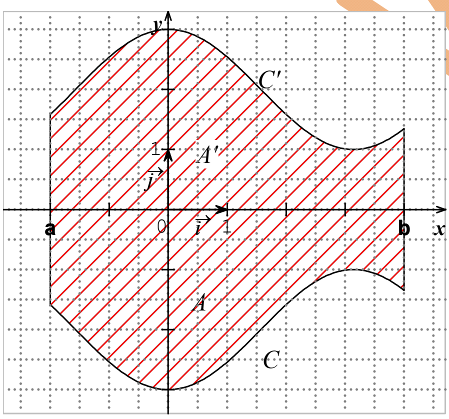
$I_6 = \int_1^e \ln x\,dx \qquad I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx$

4Calculs des aires

- **Cas d'une fonction ne prenant que des valeurs négatives sur [a ;b]**

<u>Théorème</u>

Soit f une fonction dérivable sur [a ;b] et ne prenant que des valeurs négatives sur [a ;b].



Soit C la courbe représentative de f dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

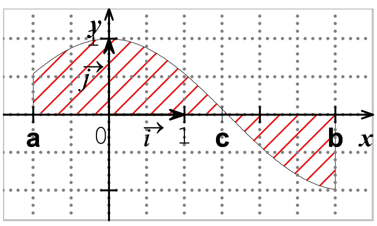
L'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie de plan limitée par C, l'axe Ox,

la droite d'équation x = a et la droite d'équation x = b

est égale à $\int_a^b -f(x)dx$

En effet, A = A'= $\int_a^b -f(x)dx$ *d'après le théorème précédent.*

- **Cas d'une fonction changeant de signe sur [a ;b]**



Si f change de signe sur [a ;b], on calcule les aires sur chaque sous-intervalle où f est de signe constant. L'aire totale est la somme des aires calculées.

$$A = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b -f(x)dx$$

Cas general : Soit f une fonction dérivable sur [a ;b] ; L'aire d'une partie de plan délimitée par la courbe représentative d'une fonction f, l'axe Ox, la droite d'équation x = a et la droite d'équation x = b

est égale à $\int_a^b |f(x)|\,dx$

<u>exemple :</u> 1) Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 1$, l'axe Ox, la droite d'équation x = -2 et la droite d'équation x = 3.

2) Calculer $\int_{-2}^{3} f(x)dx$

solution : 1) $A = \int_{-2}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^{1} -f(x)dx + \int_{1}^{3} f(x)dx$ soit $A = \int_{-2}^{-1}(x^2-1)dx + \int_{-1}^{1}(-x^2+1)dx + \int_{1}^{3}(x^2-1)dx$

$$A = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-2}^{-1} + \left[-\frac{x^3}{3} + x\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{1}^{3} = \left(\frac{-1}{3}+1-\frac{(-2)^3}{3}-2\right)+\left(\frac{-1}{3}+1-\frac{1}{3}+1\right)+\left(\frac{27}{3}-3-\frac{1}{3}+1\right)=\frac{28}{3}$$

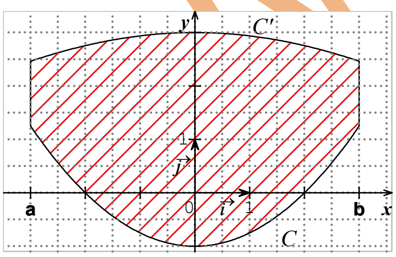
donc l'aire cherchée est $\frac{28}{3}$ u.a.

2) $\int_{-2}^{3} f(x)dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-2}^{3} = 9-3-\left(\frac{-8}{3}+2\right) = \frac{20}{3}$

Aire limitée par deux courbes :

<u>Théorème</u> : **Soient f et g deux fonctions dérivables sur [a ;b] telles que pour tout x de [a ;b] f(x) < g(x) et C et C' leurs courbes représentatives respectives dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.**

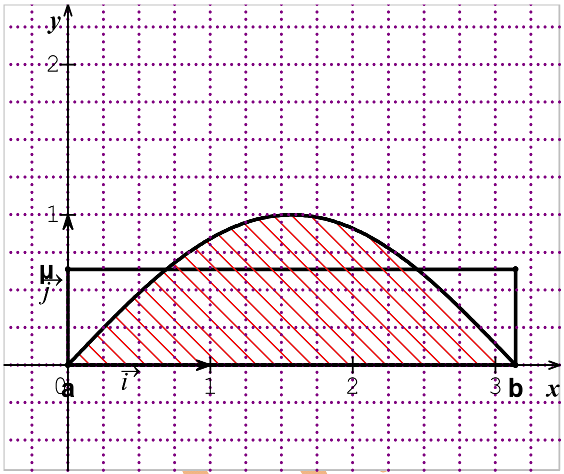
L'aire de la partie du plan limitée par les courbes C et C'et par les droites d'équation x = a et x = b est $A = \int_a^b (g(x)-f(x))\,dx$ **(unités d'aire)**



5) Valeur moyenne :

Définition : Soit f une fonction dérivable sur [a ; b]. On appelle valeur moyenne de f sur [a ; b]

le nombre réel $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$



Interprétation graphique :

Puisque $\displaystyle\int_a^b \mu\, dx = \mu\,(b-a)$, on a donc $\displaystyle\int_a^b \mu\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$.

Ainsi, **dans le cas d'une fonction positive sur [a ; b],** l'aire du domaine associé à une fonction f sur [a ; b] est égale à l'aire du rectangle de dimensions μ et b – a.

6-Intégrale et volume

Volume d'un solide dont les bases sont parallèles

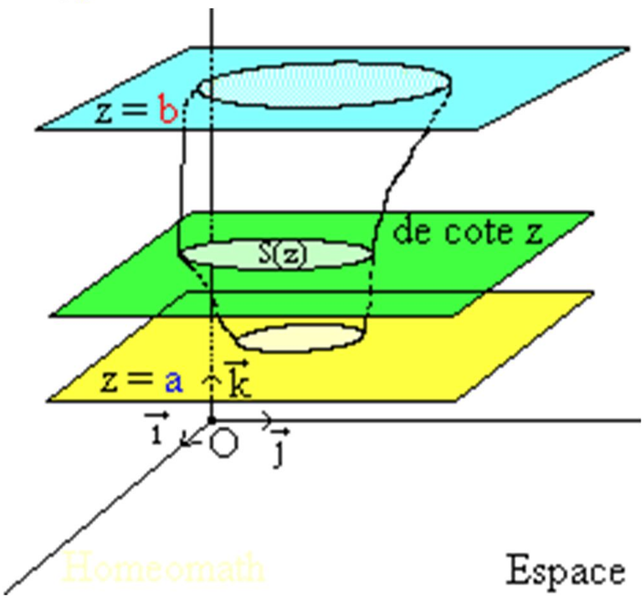
L'espace est rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,; \vec{k})$.

On considère un solide limité par deux plans parallèles au plan $(O; \vec{i}\,; \vec{j})$:

- le plan de cote a d'équation z = a
- le plan de cote b d'équation z = b

Si S(z) est l'aire de l'intersection du solide avec tout plan parallèle à $(O; \vec{i}\,; \vec{j})$ de cote z alors le volume de ce solide est (en unité de volume) :

$$V = \int_a^b S(z)dz$$



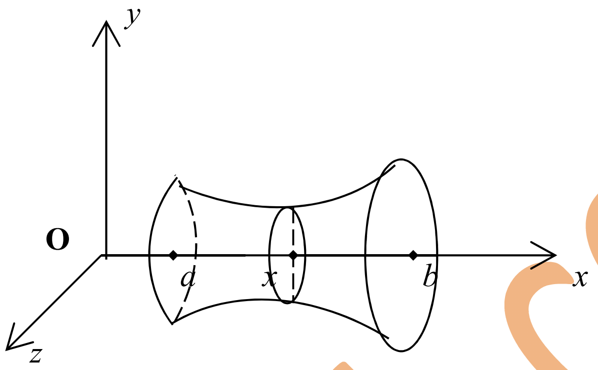
Volume d'un solide engendré par la rotation d'une partie de plan autour d'un axe

L'espace est rapporté à un repère orthogonal

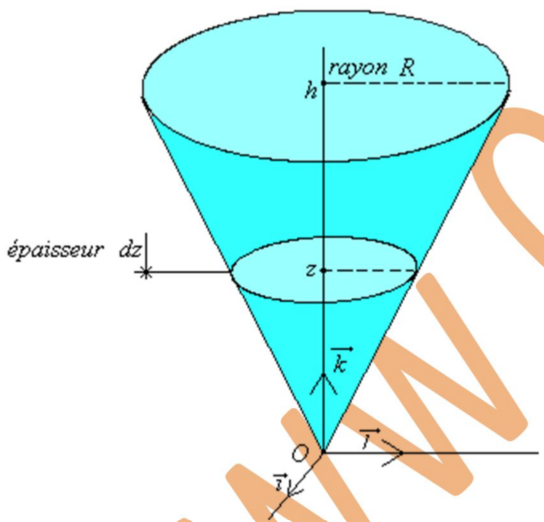
$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

On considère la partie du plan $(O; \vec{i}; \vec{j})$ délimitée par la courbe d'équation y = f(x) et les droites d'équation x = a, x = b et l'axe $(O ; \vec{i})$. En tournant autour de l'axe $(O ; \vec{i})$, cette partie de plan engendre un solide de résolution limité par les plans parallèles à $(O; \vec{j}; \vec{k})$ de cotes respectives a et b. Le volume de ce solide est en unité de volume :

$$V = \int_a^b S(x)dx = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$



Volume d'un cône par intégrale



Aire du disque de côte z :

Soit r le rayon variable du disque de côte z , on a :

$$\frac{r}{R} = \frac{z}{h}$$

donc :

$$r = \frac{R}{h} z$$

on en déduis l'aire S(z) du disque de rayon r en fonction de z.

$$S(z) = \pi r^2 = \pi \left(\frac{R}{h} z\right)^2 = \pi \frac{R^2}{h^2} z^2$$

Volume du disque d'épaisseur infinitésimale dz et de côte z :

$$V(z) = S(z)dz = \pi \frac{R^2}{h^2} z^2 dz$$

Volume du cône : le cône de sommet O , de hauteur h, et de rayon R, est la somme infinie des disques d'épaisseur infinitésimale dz et de côte z donc :

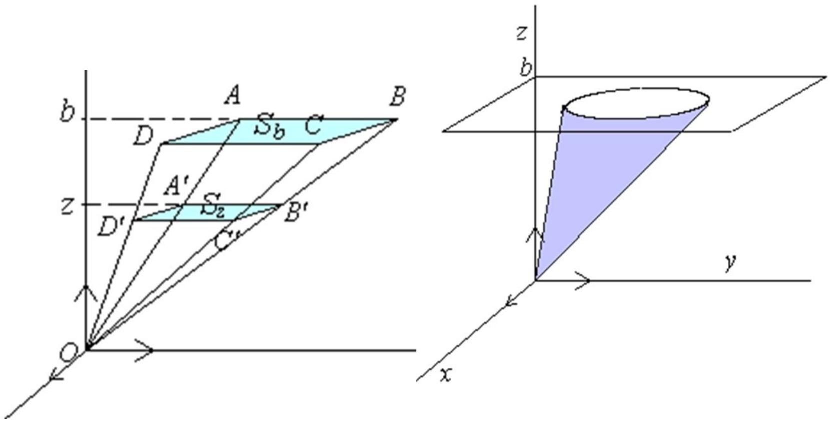
$$V = \int_0^h S(z)dz = \int_0^h \pi \frac{R^2}{h^2} z^2 dz = \pi \frac{R^2}{h^2} \int_0^h z^2 dz = \pi \frac{R^2}{h^2} \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^h$$

$$\boxed{V = \pi \frac{R^2}{h^2} \left[\frac{h^3}{3} \right] = \frac{\pi R^2 h}{3}}$$

Volume d'un cône quelconque par intégrale

On considère une pyramide de base carré ABCD, le carré A'B'C'D' est l'image du carré ABCD par l'homothétie de centre O et de rapport z/b , donc la surface S_z du carré A'B'C'D' et la surface S_b du carré ABCD sont

telle que $S_z = (z/b)^2 S_b$.
Nous admettrons que quelle que soit la surface S_z considérée d'un cône de surface de base S_b (ou d'une pyramide) on a
$S_z = (z/b)^2 S_b$.



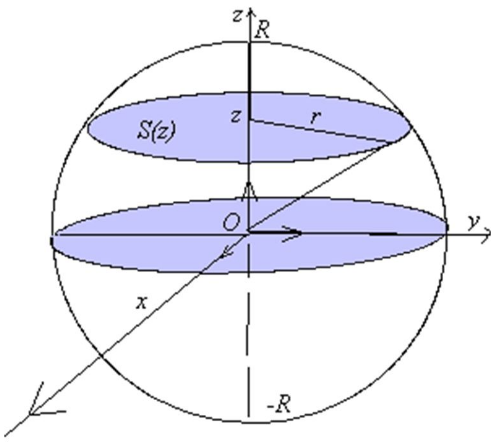
Le volume du cône est donc :

$$\int_0^b S_z dz = \int_0^b \frac{z^2}{b^2} S_b dz = \frac{S_b}{b^2} \int_0^b z^2 dz = \frac{S_b}{b^2} \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^b$$

$$= \frac{S_b}{b^2} \frac{b^3}{3} = \frac{1}{3} b \times S_b$$

on retrouve le volume d'un cône ou d'une pyramide :
1/3 de l'aire de base fois la hauteur.

Volume d'une sphère par intégrale



Volume de la sphère :

$$\int_{-R}^{R} S(z)dz = \int_{-R}^{R} \pi r^2 dz = \pi \int_{-R}^{R} R^2 - z^2 dz = \pi \left[R^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_{-R}^{R}$$

$$= \pi \left[R^3 - \frac{R^3}{3} - \left(-R^3 + \frac{R^3}{3} \right) \right] = \pi \left(2R^3 - 2\frac{R^3}{3} \right)$$

$$= \pi R^3 \left(2 - \frac{2}{3} \right) = \pi R^3 \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \pi R^3$$