Revision fonction logarithme et fonction exponentielle

Probleme1www.0et1.com

Dans tout le problème, I désigne l'intervalle]0 ;+∞[

Partie A

Soit *g* la fonction définie sur l'intervalle I par :

$g(x) = x^2 + 3 - 2 \ln x$

1.a. On note g' la dérivée de la de fonction g ; calculer g'(x) et étudier son signe, pour x appartenant à l'intervalle I.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction g.

Les limites de la fonction g en 0 et en +∞ ne sont pas demandées.

2. Calculer g(1), en déduire le signe de g(x) pour x appartenant à l'intervalle I.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle I par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x}$$

On note f ' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle I et C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques 2 cm.

1. a. Étudier la limite de f en 0 et en déduire l'existence d'une asymptote à la courbe C.

b. Étudier la limite de f en +∞.

2. a. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle I,

$$f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$$

b. Déduire de la partie A le signe de f′(x) puis le sens de variation de f sur l'intervalle I.

c. Établir le tableau de variations de la fonction *f* sur l'intervalle I.

3. Soit D la droite d'équation y = ½ x dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

a. Montrer que la droite D est asymptote à la courbe C.

b. Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection E de la courbe C et de la droite D.

c. Sur l'intervalle I, déterminer la position de la courbe C par rapport à la droite D.

4. En utilisant les résultats précédents, tracer avec soin dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la droite D et la courbe C.

Probleme2www.0et1.com

Dans ce problème : I désigne l'intervalle]0 ; +∞[

f désigne la fonction définie, pour tout x de l'intervalle]0 ; +∞[, par :

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x - 1}$$

f ' désigne la fonction dérivée de la fonction f;

C_f désigne la courbe représentative de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthogonal (Ox, Oy) d'unité graphiques 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

1.a. Vérifier que, pour tout x de l'intervalle I :

$$f(x) = e^x + 1 + \frac{1}{e^x - 1}$$

b. Déterminer la limite de f(x) quand x tend vers $+\infty$, et la limite quand x tend vers 0.
En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe C_f

2. a. Vérifier que pour tout x de l'intervalle I : $$f'(x) = \frac{e^{2x}(e^x - 2)}{(e^x - 1)^2}$$

b. Étudier, pour tout x de l'intervalle I , le signe de f'(x) .
En déduire le sens de variation de la fonction f et que, pour tout x de l'intervalle I, f(x) > 0.
3. a. Résoudre, dans l'intervalle I,
l'équation d'inconnue x, f(x) = 9/2.
b. Déduire, du résultat obtenu à la question précédente, les coordonnées des points A et B, points d'intersection de la courbe C_f et de la droite dont une équation est y = 9/2.
(A est le point d'intersection dont l'abscisse est la plus petite.)

Partie B

Soit la fonction g définie pour tout x de l'intervalle I, par : $g(x) = e^x + 1$.

On note C_g la courbe représentative de la fonction g dans le plan rapporté au repère (Ox, Oy).
C_g est donnée sur le graphique ci-après.
On note h la fonction définie , pour tout x de l'intervalle I, par: h(x) = f(x) - g(x).

1. a. Étudier, pour tout x de l'intervalle I, le signe de h(x) ; en déduire la position de C_f par rapport à la courbe C_g.
b. Résoudre dans l'intervalle I, l'inéquation h(x) < 0,05.
On admet que deux points du plan de même abscisse sont indiscernables sur un dessin dès que la différence de leurs ordonnées a une valeur absolue inférieure à 0,05.
Déterminer un demi-plan dans lequel les courbes C_f et C_g sont indiscernables.
c. Tracer, avec soin, la courbe C_f sur le graphique ci-après.
2. Montrer que, pour tout x de I :

$$h(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} - 1$$

en déduire une fonction primitive de h sur I.