1

Resumé du cours

Définition : On appelle fonction exponentielle, la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien. L'image d'un réel x par la fonction exponentielle est noté e^x.

-)pour tout réel a et pour tout réel b strictement positif, on a : $b = e^a \Leftrightarrow a = \ln b$

$\forall a \in \mathbb{R}, \ln\left(e^a\right) = a$ -) $\forall a > 0,\ e^{\ln a} = a$ -) $\ln e = 1$

Propriétés algébriques : Pour tous réels a et b, on a : $e^{a+b} = e^a \times e^b$ $\quad e^{na} = \left(e^a\right)^n\ \forall n \in \mathbb{N}$

$e^{\frac{a}{n}} = \sqrt[n]{e^a}$ pour tout entier naturel $n \geq 2$ $\quad e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$ $\quad e^{\frac{m}{n}a} = \sqrt[n]{e^{ma}}$ pour tout entier naturel $n \geq 2$ et tout entier m.

Limites : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0^-$

Pour tous entiers naturels non nuls n et m, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{nx}}{x^m} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^m e^{nx} = 0$

Dérivée de $e^{u(x)}$ Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I . la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et on a :

$e^{u(x)} = u'\left(x\right)e^{u(x)}$ pour tout réel x dans I

Corollaire : Si u est une fonction dérivable sur I, alors la fonction $f : x \mapsto u'\left(x\right)e^{u(x)}$ admet des primitives de la forme : $e^{u(x)} + c$ où c est une constante réelle.

Exponentielle de base a :

✓ *Définition :* Soit un réel $a > 0$. pour tout réel b, on a $a^b = e^{b\ln(a)}$

✓ *Définition :* Soit un réel $a > 0$. On appelle fonction exponentielle de base a la fonction : $x \mapsto a^x$.

exercices

Exercice N°1 :

Résoudre dans IR les équations et les inéquations suivantes :

a) $-e^{3x+5} + 2 = 0$ b) $2e^x + e^{-x} - 3 = 0$ c) $2e^x + e^{-x} - 3 < 0$ d) $e^{2x} - 6e^{-2x} + 1 = 0$ e) $e^{3x} + 12e^{2x} - 61e^x - 48 \geq 0$

Exercice N°2 : Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{3x} + 1}{e^{3x} - 1}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x - 5x$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{x}$ d) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^3 e^{\frac{1}{x}}$ e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x+3}}{x+4}$ f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(3 - 2x^2\right)e^x$

Exercice N°3 : Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_0^1 xe^{x^2}\ dx$ b) $\int_0^{\ln 2} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\ dx$ c) $\int_0^{-1} \left(3e^{-x} + \dfrac{4}{1 + e^{-x}}\right) dx$ d) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{1}{\cos^2\left(t\right)} e^{\tan(t)} dt$ e) $\int_0^1 te^{-2t}\ dt$

Exercice N°4 : La courbe ci-dessus représente la courbe (ζ) d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer graphiquement :

2. a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

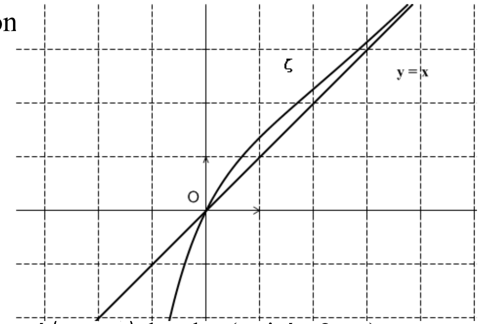
3. Donner le tableau de variation de f.

4. Justifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle Jque l'on

5. Tracer la courbe (ζ') de la fonction réciproque de f.

6. On suppose que f es la fonction définie par :
$f(x) = ax + xe^{-x}$ où a est un réel. Déterminer a.

7. Calculer A l'aire de la partie du plan limitée par (ζ), (ζ') et les droites d'équations :x = 0 et x = 1.



Exercice N°5 :

Soit f la fonction $[0,+\infty[$ définie sur par : $f(x) = \left(e^{-x} - 1\right)^2$.

On désigne par (ζ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan(unité : 2cm).

1. a) Montrer que pour tout $x \in [0,+\infty[$: $f'(x) = 2e^{-x}\left(1 - e^{-2x}\right)$. b) Dresser le tableau de variation de f.

2. a) Tracer (ζ). b) Calculer en cm^2, l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (ζ) et les droites d'équations y = 0, x = 0 et x = 1.

3. a) Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Tracer dans le même repère la courbe (ζ') de la fonction réciproque f^{-1} de f.

c) Calculer en cm^2 l, l'aire de la partie du plan limitée par les courbes (ζ), (ζ') et les droites d'équations : x = 1 et y = 1.

4. a) Montrer que : $\forall x \in [0;1[: f^{-1}(x) = -\ln\left(1 - \sqrt{x}\right)$. b) Montrer que : f^{-1} est dérivable sur $]0;1[$ et déterminer $\left(f^{-1}\right)'(x)$.

5. On pose : $I_\alpha = \int_\alpha^{\frac{1}{4}} \dfrac{1}{\sqrt{x} - x}\,dx$ où α est un réel de]0 ;1[. a) Montrer que $I_\alpha = 2\ln 2 - 2f^{-1}(\alpha)$. b) Calculer : $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} I_\alpha$

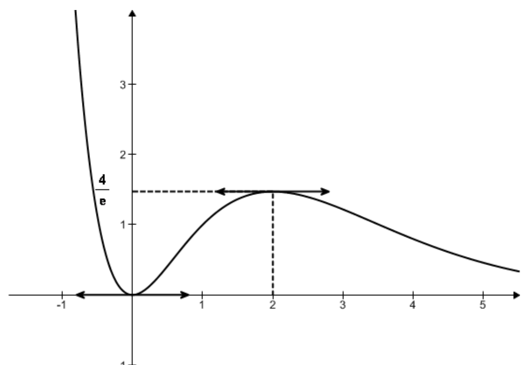
Exercice N°6: Soient f la courbe définie sur $\mathbb{R}$ et (ζ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Le graphe ci-dessous représente l'allure de la courbe de (ζ).

1. Utiliser le graphique pour répondre aux questions suivantes :
   a. Déterminer les limites : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

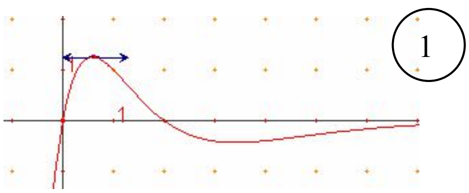
   b. Déterminer f' (2),f' (0), $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{f(x-3)}{x-3}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{x-2}{f(x) - \frac{4}{e}}$

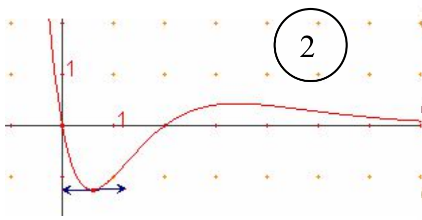
   c. Donner le comportement des branches infinies de la courbe (ζ).

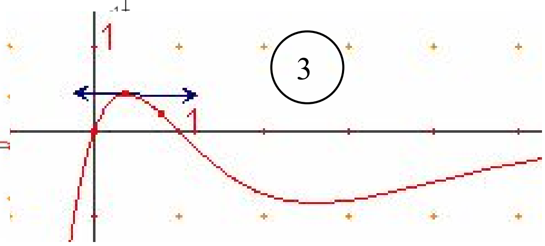
   d. Dresser le tableau de variation de f.



2. Parmi les trois courbes 1,2 et 3 ; Indiquer laquelle est susceptible de représenter f' la fonction dérivée de f ? Justifier.







3. On admet que : $f(x) = \left(ax^2 + b\right)e^{1-x}$ où a et b deux réels fixes. Déterminer les réels a et b.

4. Calculer A l'aire de la partie du plan limitée par la courbes (ζ) et les droites d'équations :x=0 et x=1.

Exercice N°7: A/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la fonction par : $f(x) = \ln\left(1 + e^{-x}\right)$ et (ζ_f) sa courbe représentative dan un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1. Dresser le tableau de variation de f. 2.a) Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f(x) = -x + \ln\left(1 + e^{x}\right)$.

b) en déduire que la droite D :y = -x est une asymptote à (ζ_f). c) Préciser la position de (ζ_f) par rapport à D.

3. a) Montrer que (ζ_f) coupe la droite $\Delta : y = x$ en un seul point d'abscisse $\alpha \in \left]0,\frac{1}{2}\right[$ .b) Construire D, Δ et (ζ_f).

4.a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.
b) Construire la courbe de f^{-1} dans le même repère. c) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

5. Soit C_n l'image de (ζ_f) par l'homothétie $h_{\left(O,\frac{1}{2n}\right)}$. Déterminer l'équation de C_n.

B/ Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $\begin{cases} u_1 = 1+\frac{1}{e} \\ u_{n+1} = \left(1+\frac{1}{e^{n+1}}\right).u_n \end{cases}$.

1.Soient $g(t) = \ln(1+t) - t$, et $h(t) = \ln(1+t) - t + \frac{t^2}{2}$ pour tout $t \in]0,+\infty[$.

a. Etudier les variations de g et h. b.En déduire que pour tout $t \in]0,+\infty[$, on a : $t - \frac{t^2}{2} < \ln(1+t) < t$

c.En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $e^{-x} - \frac{e^{-2x}}{2} < f(x) < e^{-x}$.

2.a) Montrer que la suite u est croissante. b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\ln(u_n) = \sum_{k=1}^{k=n} f(k)$

3.On pose : $S_1 = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{e^k}$ et $S_2 = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{e^{2k}}$ .a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $S_1 - \frac{1}{2}S_2 < \ln(u_n) < S_1$.
b) Montrer que la suite u est majorée. En déduire que u est convergente.
c) Soit L la limite de u. Montrer que : $\frac{2e+1}{2(e^2-1)} \le \ln(L) \le \frac{1}{e-1}$.

Exercice N°8: A/ Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = xe^x - e^x + 1$

1. Montrer que pour tout réel x on a : $g(x) = \int_0^x te^t dt$.
2. a) Montrer que pour tout réel strictement positif x, on a : $\frac{x^2}{2} \le g(x) \le \frac{x^2}{2}.e^x$

b) Montrer que pour tout réel strictement négatif x, on a : $\frac{x^2}{2}.e^x \le g(x) \le \frac{x^2}{2}$ c) En déduire que : $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

B/ Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \ne 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$. On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1.a) Montrer que f est continue en0. b) Vérifier que pour tout réel x non nul, on a : $\frac{f(x)-1}{x} = \frac{g(x)}{x(e^x-1)} - 1$.

c) En déduire que f est dérivable en 0 et on a : $f(0) = -\frac{1}{2}$.

d) Montrer que pour tout réel x non nul, on a : $f'(x) = \frac{-g(x)}{(e^x-1)^2}$. e) Dresser le tableau de variation de f.

2. a) Montrer que la courbe C_f admet au voisinage de -∞ une asymptote oblique Δ dont on déterminera une équation cartésienne.
b) Tracer Δ et C_f.

Exercice N°9: I- Soient $f : x \mapsto \frac{e^{-x}}{1+e^x}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1.Etudier le comportement de C_f au voisinage de -∞. 2.Etudier f puis construire C_f.

3. Soit $I = \int_0^1 f(x)\,dx$. Interpréter géométriquement I.

II- 1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J. 2.Construire $C_{f^{-1}}$ la courbe de f^{-1}.

3. Calculer $f^{-1}(x)\ \forall x \in J$

III- Soit $k=\int_0^1 e^{-x}\ln\left(1+e^{-x}\right)dx$. 1.Montrer à l'aide d'une intégration par parties que : $k=\ln 2-\frac{1}{e}\ln\left(\frac{1+e}{e}\right)-I$.

2. a) Déterminer la primitive de la fonction ln qui s'annule en 1. b) Calculer alors k.
   c) Déduire en fin I
3. Soit D le domaine du plan limitée par $C_{f^{-1}}$, et les droites d'équations respectives y = 0,y = 1 et x =0. Calculer l'Aire de D.

__Exercice N°10:__ **A)** Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{e^x-1}{x} & \text{si } x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$.

1. Etudier la continuité de f sur $[0,+\infty[$. 2.Montrer que $\forall x \in [0,+\infty[,\ f'(x)>0$.
3. On se propose dans cette question d'étudier la dérivabilité de f en 0. Soit h un nombre réel strictement positif et g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $g(x)=\dfrac{e^h-1-h}{h^2}x^2-e^x+x+1$.

a. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer qu'il existe un réel $c\in\,]0;h[$ tel que $\dfrac{e^h-1-h}{h^2}=\dfrac{1}{2}f(c)$.

b. En déduire : $\lim\limits_{h\to 0^+}\left[\dfrac{e^h-1-h}{h^2}\right]$. c. Montrer que f est dérivable en 0.

d. Construire la courbe de f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

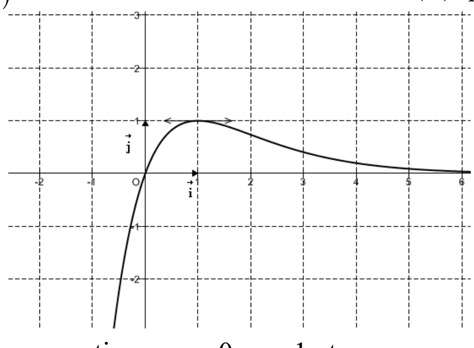
B- Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x)=\int_0^{e^x} f(t)\,dt$ 1.a) Justifier l'existence de F(x) pour tout réel x.b) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$. 2.Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)$

3. a) Montrer que : $e^t>t,\ \forall t\in\,]0,+\infty[$. b) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $F(x)\geq\int_1^{e^x}\dfrac{t-1}{t}\,dt$

c) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}$. d) Donner le tableau de variation de F.

e) Tracer, dans un autre orthonormé, la courbe de F. On prend F(0) ≈1,3.

__Exercice N°11:__ Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère la courbe ci-contre (C) qui représente une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.



1. Donner : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x);\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x);f(1);f'(1);\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x+5)}{x+5};$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+5)}{x+5}$ et $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-1}{f(x)-1}$

2. Dresser le tableau de variation de f.
3. La courbe (C) est celui de la fonction $f(x)=xe^{1-x}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. On désigne par A_n la mesure d'aire du domaine du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations respectives : y = 0, x = 1 et x = n.

a. Montrer que : $A_n=-e^{1-n}(n+1)+2$ b. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}A_n$.

4. Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n=1+2e^{-1}+3e^{-2}+4e^{-3}+.......+ne^{1-n}$.

a. Montrer que pour tout entier $k\geq 2$, on a : $f(k)\leq\int_{k-1}^{k}f(t)\,dt$

b. En déduire que : $U_n\leq 3$ c. Prouver que U est convergente.

__Exercice N°12:__ On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x)=1+\dfrac{x}{n+1}-e^{\frac{x}{n}}$ pour tout entier naturel $n\geq 2$.

1. a) Etudier les variations de f_n. b) Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet une seule solution $\alpha_n<0$.
2. On considère la fonction g définie par : $g(x)=\ln\left(\frac{x-1}{n+1}\right)+\frac{2}{x}$. Dresser le tableau de variation.
3. Montrer que g(x) < 0. En déduire que : $f_n(-2)<0$ puis $\alpha_n>-2$.
4. Montrer que : $f_n\left[2n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right]=\frac{2n}{n+1}\left[\frac{2n+1}{2n(n+1)}+\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right]$
5. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $h(x)=\frac{2x+1}{2x(+1)}+\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

a. Donner le signe de h(x) puis déduire que : $f_n\left[2n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right]>0$

b. Montrer que : $-2<\alpha_n<2n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$.

Exercice N°13: I- 1) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ \forall n\in\mathbb{N}^*: 1+n.x\le(1+x)^n$ 2) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ \ln(1+x)\le x$.

3) En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}^*: 2\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\le e$.

4) En déduire par récurrence que : $\forall n\ge 6: 2^n\le\frac{n^n}{n!}\le e^n$ et que $\forall n\ge 6: \left(\frac{n}{e}\right)^n\le n!\le\left(\frac{n}{2}\right)^n$.

II- On pose $\forall n\in\mathbb{N}^*: w_n=\frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}}$ et $v_n=\ln w_n$ 1) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*: v_{n+1}-v_n=1+\frac{1}{2}(2n+1)\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

2) Montrer que : $\forall x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]: -\frac{2}{3}x^3\le\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)+x\le 0$. (On utilisera : $\ln\left(\frac{1-\frac{1}{2n+1}}{1+\frac{1}{2n+1}}\right)=\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$).

3) En déduire que : a- $-\frac{2}{3(2n+1)^2}\le v_{n+1}-v_n\le 0\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ b- $-\frac{2}{6n^2}\le v_{n+1}-v_n\le 0\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

c- $\forall n\ge 2,\ v_n\ge 1-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+.......+\frac{1}{(n-1)^2}\right)$ (On admettra que : $\forall n\ge 1,\ \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+.......+\frac{1}{n^2}\le 2-\frac{1}{n}$)

4) a- Montrer que la suite $(v_n)_{n\ge1}$ est convergente. b- Montrer que la suite $(w_n)_{n\ge1}$ est convergente.

Exercice N°14: Soient $F(x)=\int_0^{u(x)}g(t)\,dt$ avec $g(t)=\sqrt{1+t^2}$ et $u(x)=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}\right)$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: u(x) = 1 puis calculer u(0).
2. a) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $F'(x)=\frac{1}{8}\left(e^x+e^{-x}+2\right);\forall x\in\mathbb{R}$.

   b) Déduire l'expression de F(x) sans intégrale.
3. Le plan est muni d'un repère orthonormé. Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de g et les droites d'équations respectifs x = 0 ; x = 1 et y = 0. calculer A.
4. Soit la suite (v_n) définie par sur $\mathbb{N}^*$ par : $v_n=\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n+1}}g(t)dt$. Posons : $S_n=\sum_{k=1}^{k=n}v_k$.

a. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*;\ v_n\le 0$ et $\frac{-1}{n(n+1)}g\left(\frac{1}{n}\right)\le v_n$ b. Préciser donc $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$.

c. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ S_n=\int_0^{\frac{1}{n+1}}g(t)\,dt-A$. Puis trouver $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$.

Exercice N°15: On considère la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $I_n = \int_0^1 x^n e^{x^2}\,dx$

1. a) Montrer que (I_n) est décroissante sur $\mathbb{N}^*$. b) Prouver donc que (I_n) converge.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $2I_{n+2} + (n+1)I_n = e$
3. Déduire de ce qui précède que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\frac{e}{n+3} \le I_n \le \frac{e}{n+1}$. 4.Calculer donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
5. Calculer I_1. Trouver la valeur de : $J = \int_0^1 (x^5 + 2x^3)\,dx$.

Exercice N°16: Soit la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$.

1. Montrer que f est continue à droite de 0.
2. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, on pose : $I(x) = \int_0^x \frac{e^t (x-t)^2}{2}\,dt$.

a. Sans calculer I(x), montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a : $0 \le I(x) \le \frac{x^3}{6}e^x$. En déduire $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{I(x)}{x^2}$.

b. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + I(x)$. En déduire $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$.

c. Montrer que f est dérivable à droite en 0 et que : $f'_d(0) = 2$.

3. Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $g(x) = (x-1)e^x + 1$ a. Etudier les variations de g

b. En déduire le signe de g(x) pour tout $x \in [0,+\infty[$.

4. a. Exprimer f'(x) en fonction de g(x) pour tout $x \in]0,+\infty[$ puis dresser le tableau de variation de f.

b. Construire la courbe de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

5. Soit F la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par : $F(x) = \int_0^{\ln x} f(t)\,dt$ a. Justifier que F(x) existe pour tout $x \in [1,+\infty[$.

b. Montrer que F est dérivable sur $]1,+\infty[$ et calculer F'(x)

c. Justifier que : $\forall x \in]e,+\infty[$, on a : $F(x) \ge \int_1^{\ln x} \frac{2t-1}{t}\,dt$. Déterminer alors $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

Exercice N°17: On considère les fonctions f, K et F_n définie par sur $[0,+\infty[$ par :

$f(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$, $K(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ et $F_n(x) = \int_0^1 [f(x)]^n\,dx$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $n \ge 2$.

1. Vérifier que : $\forall t \in [0,+\infty[$, on a : $e^{-t} \le f(t) \le 2e^{-t}$. 2.En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} [f(t)]^n = 0$.

3.On pose : $u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x)$. a. Vérifier que pour tout $t \in [0,+\infty[$: $[f(t)]^2 = K'(t)$. En déduire u_2.

b. Vérifier que $\forall t \in \mathbb{R} : 4 - (e^t + e^{-t})^2 = -(e^t - e^{-t})^2$. En déduire que $[f(t)]^{n-1} f'(t)K(t) = [f(t)]^{n+2} - [f(t)]^n$.

c. Par une intégration par parties, montrer que :

$\forall\, n \ge 2$ et $\forall x \in [0,+\infty[$, on a : $\int_0^x [f(t)]^{n-1} f'(t)K(t)\,dt = \frac{1}{n}K(x)[f(x)]^n - \frac{1}{n}\int_0^x [f(t)]^{n+2}\,dt$.

d. En déduire alors que : $(n+1)F_{n+2}(x) - nF_n(x) = K(x)[f(x)]^n$. Montrer alors que : $u_{n+2} = \frac{n}{n+1}u_n$.

e. Montrer, par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+2} = \frac{[2^n.n!]^2}{(2n+1)!}$

Exercice N°18: Soit F_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $F_n(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t^n}\,dt$.

1. a. Vérifier que F_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $F_n'(x)$ pour tout x strictement positif.
b. Etudier le sens de variation de F_n.
2. a. Montrer que : $\forall x \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq t \leq x$, on a: $\frac{e^t}{x^n} \leq F_n(t) \leq e^t$.
b. En déduire que : $\frac{e^x - e}{x^n} \leq F_n(x) \leq e^x - e$. Calculer alors $\lim_{x\to+\infty} F_n(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{F_n(x)}{x}$
3. Soit $x \in]0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$ .a. Montrer que : $\forall t \in [x,1], \frac{1}{t} \leq \frac{e^t}{t^n}$.
b.En déduire que : $\forall x \in]0;1], F_n(x) \leq \ln x$. Calculer alors $\lim_{x\to 0^+} F_n(x)$.
4. a. Montrer que F_n est une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$. b.Montrer que F_n^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\left(F_n^{-1}\right)'(0)$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et $U_n = F_n(\ln 3)$ a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq U_n < \frac{3}{n-1}\left(1 - \frac{1}{(\ln 3)^{n-1}}\right)$.
b. Calculer $\lim_{n\to+\infty} U_n$. c. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_n - nU_{n+1} = \frac{3}{(3\ln 3)^n} - e$ .d.Calculer $\lim_{n\to+\infty} n.U_n$.

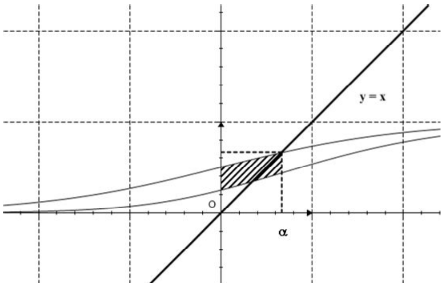
Exercice N°19 : Soit $F(x) = \int_1^{1+\ln^2 x} e^{\sqrt{t-1}}\,dt \quad \forall x \in]0,+\infty[$

1. a) Justifier l'existence de F sur $]0,+\infty[$.
b) Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que : $\forall x \in]0,+\infty[, F'(x) = \frac{2\ln x}{x} e^{|\ln x|}$.

2. a) Calculer F(1) et vérifier que pour $x \geq 1, F(x) = 2\int_1^x \ln t\,dt$. en déduire F(x) pour $x \in]1,+\infty[$
b) Montrer que $\forall x \in]0,+\infty[$, $F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)$. En déduire l'expression de F(x) sur]0 ;1].
3. Calculer chacune des deux intégrales suivantes : $A = \int_1^2 e^{\sqrt{t-1}}\,dt$ puis $B = \int_2^5 e^{\sqrt{t-1}}\,dt$

Exercice N°20: Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$.
1. a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera.
   b) Montrer que l'équation : $f(x) = x$ admet une unique solution α tel que : $0{,}5 < \alpha < 1$.
2. Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $I_n = \int_0^\alpha f^n(t)\,dt$

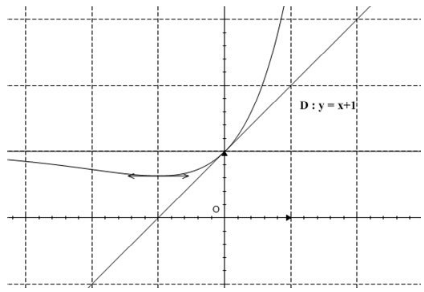
a) Calculer I_1.
b) Vérifier que : $f'(x) = f(x) - [f(x)]^2$. En déduire que :
$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2^n} - \alpha^n\right)$
c) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et positive, que peut on conclure ?
d) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{\alpha}{2^n} \leq I_n \leq \alpha^{n+1}$. En déduire $\lim_{n\to\infty} I_n$.



3. a) Montrer que pour tout n > 1, $I_n = -\ln[2(1-\alpha)] + \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2^k} - \alpha^k\right)$. b) En déduire : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2^k} - \alpha^k\right)$.
4. Sur le graphique ci-dessous, on donne les courbes de f et de f^2.
a) Identifier les deux courbes.
b) Calculer en fonction de α, l'aire A du domaine coloré.

Exercice N°21: Soit g la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = xe^{ax} + b$ où a et b sont deux réels et C_g sa courbe représentative donnée ci-contre dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ C_g admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ de direction celle de $(O, \vec{i})$.

La droite D : y = x + 1 est une tangente à C_g au point A(0 ;1).



1. a) Par lecture graphique, déterminer : $g'(-1)$, $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$.

b) Calculer : $\lim_{x\to1} \frac{g(x-1)-1}{x-1}$

c) Déterminer les valeurs de a et b. Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + (x-1)e^{x}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2. a) Montrer que pour tout réel x, on a : $f'(x) = g(x)$
   b) Dresser le tableau de variation de f.
3. a) Montrer que la droite $\Delta : y = x$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$.
   b) Etudier les positions relatives de (C_f) par rapport à Δ.
   c) Montrer que l'équation : f(x) = 0 admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α et vérifier que : $0,5 < \alpha < 0,7$.
   d) Montrer que (C_f) admet un seul point d'inflexion I que l'on précisera.
4. Construire la droite Δ et la courbe (C_f).
5. Soit $\lambda < 1$, on désigne par $A(\lambda)$, l'aire de la partie plane limitée par la courbe (C_f), la droite Δ et les droites d'équations : $x = \lambda$ et $x = 1$.
   a) Calculer en fonction de $\lambda, A(\lambda)$. b) Montrer que : $\lim_{\lambda\to-\infty} A(\lambda) = e$. Interpréter le résultat.

Exercice N°22 : Soient $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\begin{cases} f_n(x) = \dfrac{(1-e^{-2x})^n}{x} & \text{si } x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$.

1. a. Montrer que f_n est continue à droite en 0.
   b. Montrer que f_n est dérivable à droite en 0 et calculer $(f'_n)_d(0)$. (On distinguera les deux cas n = 2 et n≥ 3).
   c. Montrer que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que : $f'_n(x) = \dfrac{e^{-2x}(1-e^{-2x})^{n-1}}{x^2}(1+2nx-e^{2x})$.
2. On pose : $g_n(x) = 1 + 2nx - e^{2x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. a. Dresser le tableau de variation de g_n.
   b. Montrer que l'équation : $g_n(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}_+^*$ une unique solution α_n.
   c. Montrer que : $\forall x \in]1,+\infty[; \frac{1}{x} + 2\ln x - x < 0$ et en déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, \frac{1}{2}\ln(n) < \alpha_n < \ln n$.
   d. Donner le signe de $g_n(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ puis dresser le tableau de variation de f_n.
3. On pose : $u_n = \left(\frac{1}{2}\ln(n)\right) f_n\left(\frac{1}{2}\ln(n)\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ .a. Montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$
   b. En déduire que $(u_n)_{n\geq2}$ est une suite convergente et calculer sa limite.

Exercice N°23: **A)** Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ f(x) = 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$. On note par ζ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$. .b. Etudier les variations de f.

c.Etudier la position relative de ζ par rapport à la droite $\Delta : y = x$ d.Tracer ζ et Δ.

2. a. Montrer que f réalise une bijection de $]-1,+\infty[$ sur un intervalle J à préciser.

b. Soit g la fonction réciproque de f. Expliciter $g(x)\ \forall x \in J$ et tracer sa courbe ζ'.

3. Soit Γ la courbe d'équation : $\begin{cases} y = 2\ln\left(\dfrac{4+x}{4-x}\right) \\ x \in]-4,0] \end{cases}$. Montrer que Γ est limage d'une partie de ζ' par la similitude indirecte de centre O, de rapport 4 et d'axe Δ.

B) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose: $u_n = \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ et $I_n = \int_0^{1-\frac{1}{n}} g(x)\, dx$

1. Vérifier que : $\forall n \geq 2$, on a: $u_n = \sqrt[n]{\dfrac{n^{n-1}}{(n-1)!}}$. Déduire que $\ln(u_n) = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n-1} g\left(\dfrac{k}{n}\right)$

2. a. Montrer que : $\forall k \in \{0,1,2,......,n-2\}$ on a: $\dfrac{1}{n}g\left(\dfrac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} g(x)\, dx \leq \dfrac{1}{n}g\left(\dfrac{k+1}{n}\right)$.

b. En déduire que : $\forall n \geq 2, \ln(u_n) + \dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{1}{n}\right) \leq I_n \leq \ln(u_n)$

3. a. Calculer I_n en fonction de n. Déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}^* : 1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{1}{n}\right) \leq \ln(u_n) \leq 1 - \dfrac{1}{n}$

b. Montrer alors que u est convergente et trouver sa limite.

Exercice N°24 : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; on pose $I_n = \int_0^n \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^2 e^{-2x}\, dx$

1. Donner une interprétation géométrique du réel I_n.

2. a. Montrer que : $\forall t \geq 0$, on a: $t - \dfrac{1}{2}t^2 \leq \ln(1+t) \leq t$.

b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,n]$, on a : $x - \dfrac{x^2}{2n} \leq n\ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right) \leq x$ et $e^{-x}e^{-\frac{x^2}{2n}} \leq \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n e^{2x} \leq e^{-x}$.

3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \leq 1 - e^{-n}$.

4. a. Montrer que : $\forall t \geq 0, e^{-t} \geq 1 - t$ b.En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in [0,n]$, on a : $e^x e^{-\frac{x^2}{2n}} \geq e^{-x}\left(1 - \dfrac{x^2}{2n}\right)$.

c.En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $I_n \geq 1 - \dfrac{1}{n} + e^{-n}\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{n}{2}\right)$.

5. Montrer que $(I_n)_{n\geq 1}$ converge vers une limite que l'on précisera.

Exercice N°25: 1.Soient $n \in \mathbb{N}$ tel que : $n \geq 2$ et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f_n(x) = \dfrac{x^n}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$ et (C_n) sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a. Montrer que f_n est continue ne 0.

b. Etudier la dérivabilité de f_n en 0. (On distinguera les cas n = 2 et n > 2.).

2. Soit h_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h_n(x) = (n-x)e^x - n$.

a. Dresser le tableau de variation de h_n. Vérifier que pour tout $n \geq 2; e^{n-1} - n > 0$ puis déduire que l'équation $h_n(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ deux solutions 0 et α_n et que : $n - 1 < \alpha_n < n$.

b. Dresser, suivant la parité de n, le tableau de variation de f_n. Montrer que $f_n(\alpha_n) = (\alpha_n)^{n-1}(n - \alpha_n)$.

3.Tracer la courbe (C_2) de la fonction f_2. (on précisera la tangente en 0 et on prendra $\alpha_2 = 1,6$).

4.Soit F la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par : $F(x) = \int_{\ln x}^{2\ln x} f_1(t)\, dt$.

a. Montrer que pour tout $x \in \left]1, \sqrt{e}\right[$, il existe un réel $c \in [\ln x, 2\ln x]$ tel que : $F(x) = \frac{c^2}{e^c - 1}\ln(x)$ et que :
$\frac{(\ln x)^3}{(x-1)^2} \leq \frac{F(x)}{x-1} \leq \frac{4(\ln x)^3}{(x-1)^2(x+1)}$.

b. Montrer alors que F est dérivable à droite en 1 et calculer $F'_d(1)$ .Montrer que F est dérivable sur $]1, +\infty[$ et que : $F'(x) = \frac{(\ln x)^2}{x(x^2-1)}(7-x)$

Exercice N°26: **1.**On pose pour tout entier naturel n non nul : $I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^{-x}\, dx$

a. A l'aide d'une intégration par parties, Calculer I_1.

b. Prouver que, pour tout n non nul, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!}\int_0^1 e^{-x}\, dx$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

c. Montrer, en utilisant une intégration par parties, que pour tout entier naturel n non nul, on a $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} - I_n$.

2. On considère la suite réelle (a_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = a_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \text{ pour } n \geq 1 \end{cases}$.

a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul : $a_n = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n$. b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

Exercice N°27 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \int_0^1 t^{n+\frac{1}{2}} e^{-\frac{t}{2}}\, dt$.

1. a) Justifier l'existence de I_n. b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\frac{2}{\sqrt{e}(2n+3)} \leq I_n \leq \frac{2}{2n+3}$.
2. a) Montrer que (I_n) est décroissante. b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = -\frac{2}{\sqrt{e}} + (2n+3)I_n$.

   c) En déduire que : $\frac{2}{\sqrt{e}(2n+3)} \leq I_n \leq \frac{1}{\sqrt{e}(n+1)}$. Puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n.I_n$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \frac{2^n n!}{(2n+1)!} I_n$ .a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n = u_0 - \frac{1}{\sqrt{e}}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{2^{k+1}k!}{(2k+1)!}$.

   b) En déduire que : $0 \leq u_n \leq I_n$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

   c) On pose : $S_n = \sum_{k=1}^{k=n}\frac{2^{k+1}k!}{(2k+1)!}$. Montrer que (S_n) est convergente vers un réel ℓ et que : $\frac{2}{3} \leq \ell \leq 1$.

Exercice N°28:1. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{1-e^{-2x}}{x} \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$. On désigne par (C) la courbe f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}_+$, on a $1 - 2t \leq e^{-2t} \leq 1$

b. A l'aide d'une intégration par parties entre 0 et x, montrer que: $\forall t \in \mathbb{R}_+$, on a $2x - 2x^2 \leq 1 - e^{-2x} \leq 2x$ et que : $\forall t \in \mathbb{R}_+ 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 \leq e^{-2x} + 2x - 1 \leq 2x^2$.

c. Montrer que f est dérivable à droite en 0 et que $f'_d(0) = -2$.

2.a. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $e^{2x} \geq 1 + 2x$ puis dresser le tableau de variation de f. b. Tracer (C).

3.On pose : $F(x) = \int_x^{2x} f(t)\, dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

a. Montrer que f st dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que : $F'(x)=2f(2x)-f(x)$ b. Vérifier que : $\forall \in \mathbb{R}_+,\ F'(x)=f(x)e^{-2x}$.

c. Montrer que : $\forall t\in[1,+\infty[,\ 0\le \frac{1}{t}-f(t)\le e^{-2t}$. En déduire que : $\forall x\in[1,+\infty[,\ 0\le \ln 2-F(x)\le \frac{1}{2}\left(e^{-2x}-e^{-4x}\right)$.

d. Dresser le tableau de variation de F.

4. Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $S_n=f(n)+f(n+1)+............+f(2n)$

a. Vérifier que : $\forall k\in\{0,1,1,.....,n-1\},f(k+1+n)\le \int_{k+n}^{k+1+n} f(x)dx\le f(k+n)$.

b. En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ F(n)+f(2n)\le S_n\le F(n)+f(n)$

c. Montrer alors que S_n est convergente et calculer sa limite.

Exercice N°29: **I-** On considère la fonction g définie par : $g(x)=1-xe^{-x}$.

1. Etudier le sens de variation de g et déduire que : $\forall x\in\mathbb{R}, g(x)>0$.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{1}{1-xe^{-x}}$. Etudier f et tracer sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
3. Montrer que pour tout $x\ge 0$, on a : $1\le f(x)\le \frac{e}{e-1}$.

II- Soit φ la fonction définie sur $I=[1,+\infty[$ par : $\varphi(x)=\int_0^{\ln x} t.f(t)\,dt$

1. Montrer que φ est dérivable sur I et que : $\varphi'(x)=\frac{\ln(x)f(\ln x)}{x}$.
2. Montre que : $\forall x\ge 1,\ \frac{(\ln x)^2}{2}\le \varphi(x)\le \frac{e(\ln x)^2}{2(e-1)}$. Déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}$.
3. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\begin{cases} F(x)=\varphi(x) & \text{si } x\ge 1\\ F(x)=\varphi\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } 0<x<1\end{cases}$. Etudier F la dérivabilité de F en 1. Dresser le tableau variation de F.

Exercice N°30: Pour tout entier naturel non nul n, on considère la fonction f_n définie sur [0 ;1] par : $f_n(x)=e^{-x}-x^{2n+1}$.

1. Etudier les variations de f_n.
2. Montrer que pour tout naturel non nul n, l'équation : $f_n(x)=0$ admet une unique solution u_n et que $u_n\in[0;1]$. On a défini ainsi sur $\mathbb{N}^*$ une suite (u_n).
3. a) Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in]0;1[$. Comparer les réels $f_{n+1}(x)$ et $f_n(x)$
   b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$; $f_n(u_{n+1})<0$.
   c) Montrer que la suite (u_n) est croissante et en déduire qu'elle est convergente.
4. a) Montrer que pour tout $n\ge 1,\ \ln(u_n)=-\frac{u_n}{2n+1}$. b) Calculer la limite de la suite (u_n).

Exercice N°31 : Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x)=\int_0^x \ln\left(1+e^{-2t}\right)dt$. On désigne par (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$.
   b) Donner une équation de la tangente T à la courbe (Γ) au point d'abscisse 0.
2. a) Montrer que pour tout réel $t\ge 0$, on a : $\frac{1}{(1+t)^2}\le\frac{1}{1+t}\le 1$

b) En déduire que pour tout réel $x\ge 0,\ \frac{x}{1+x}\le \ln(1+x)\le x$

3. a) Montrer que pour tout réel $x\ge 0$; on a : $\frac{1}{2}\left[\ln 2-\ln\left(1+e^{-2x}\right)\right]\le F(x)\le\frac{1}{2}\left(1-e^{-2x}\right)$.

b) En déduire que F admet en $+\infty$ une limite L dont on donnera un encadrement.

4. a) Donner un encadrement de F(x) sur $]-\infty,0]$.

b) Calculer alors $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ et dresser le tableau de variation de F. c) Donner une allure de (Γ). (on prendra $L \simeq 0,4$).

Les solutions

Exercice N°1 :

a) $e^{3x+5} = 2 \Leftrightarrow 3x+5 = \ln 2 \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln(2)-5}{3}$ b) $(2e^x + e^{-x} - 3 = 0)\times(e^x) \Leftrightarrow 2e^{2x} - 3e^x + 1 = 0$. On pose $y = e^x$, on aura

$2y^2 - 3y + 1 = 0 \;\Leftrightarrow y_1 = 1$ et $y_2 = \dfrac{1}{2}$ donc $e^x = 1$ ou $e^x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -\ln 2$ alors $S_{\mathbb{R}} = \{0; -\ln 2\}$.

c) $(2e^x + e^{-x} - 3 < 0)\times(e^x > 0) \Leftrightarrow 2e^{2x} - 3e^x + 1 < 0$. Tableau de signe :

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0		$+\infty$
$2e^x + e^{-x} - 3$		+	0	−	0	+	

Donc $S_{\mathbb{R}} =]-\ln 2; 0[$

d) $e^{2x} - 6e^{-2x} + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{4x} + e^{2x} - 6 = 0$ On pose $y = e^{2x}$, on aura : $y^2 + y - 6 = 0 \Leftrightarrow y = 2$ ou $y = -3$ donc

$e^{2x} = 2$ ou $e^{2x} = -3$ or $e^{2x} > 0$ alors $x = \dfrac{\ln 2}{2}$ et par suite $S_{\mathbb{R}} = \left\{\dfrac{\ln 2}{2}\right\}$.

e) $e^{3x} + 12e^{2x} - 61e^x + 48 \geq 0$. On pose $h = e^x > 0$, on aura : $h^3 + 12h^2 - 61h + 48 \geq 0 \Leftrightarrow (h-1)(h-3)(h+16) \geq 0$

$\Leftrightarrow h \in]-16,1] \cup [3,+\infty[$ or $h > 0$ alors $h \in]0,1] \cup [3,+\infty[$ et comme la fonction ln est continue

sur $]0,+\infty[$ donc $x \in]-\infty,0] \cup [\ln 3,+\infty[$ et par suite $S_{\mathbb{R}} =]-\infty,0] \cup [\ln 3,+\infty[$

Exercice N°2 : a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{3x}+1}{e^{3x}-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{3x}\left(1+\dfrac{1}{e^{3x}}\right)}{e^{3x}\left(1-\dfrac{1}{e^{3x}}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\dfrac{1}{e^{3x}}}{1-\dfrac{1}{e^{3x}}} = \dfrac{1+\dfrac{1}{+\infty}}{1-\dfrac{1}{+\infty}} = 1$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - 5x = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{e^x}{x} - 5\right) = +\infty(+\infty - 5) = +\infty$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{2x}-1}{2x}\right)\times 2 = 1\times 2 = 2$

d) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^3 e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\dfrac{1}{x^3}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{e^{\frac{1}{3x}}}{\dfrac{1}{x}}\right)^3 = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{3}\times\dfrac{e^{\frac{1}{3x}}}{\dfrac{1}{3x}}\right)^3 = \lim\limits_{y\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}.\dfrac{e^y}{y}\right)^3 = \dfrac{1}{3}\times(+\infty) = +\infty$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x+3}}{x+4} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^{x+3}}{x+3}\right).\left(\dfrac{x+3}{x+4}\right) = +\infty\times 1 = +\infty$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty}(3-2x^2)e^x = \lim\limits_{x\to-\infty}(3e^x - 2x^2e^x) = 0 - 0 = 0$

Exercice N°3 : a) $\int_0^1 xe^{x^2}\, dx = \left[\dfrac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1 = \dfrac{1}{2}(e-1)$ b) on pose: $\left(u'(x) = e^x - e^{-x} \Leftarrow u(x) = e^x + e^{-x}\right)$

donc $\int_0^{\ln 2} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\, dx = \left[\ln\left|\underbrace{e^x + e^{-x}}_{>0}\right|\right]_0^{\ln 2} = \ln\left(e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}\right) - \ln 2 = \ln\left(2 + \dfrac{1}{2}\right) - \ln 2 = \ln\left[\dfrac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}}\right] = \ln 5$

c) $\int_0^{-1}\left(3e^{-x} + \dfrac{4}{1+e^{-x}}\right) dx = \int_0^{-1}\left(3e^{-x} + \dfrac{4e^x}{e^x+1}\right) dx = \left[-3e^{-x} + 4\ln\left|e^x+1\right|\right]_0^{-1} = -3e + 4\ln\left(e^{-1}+1\right) + 3 - 4\ln 2$

d) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{1}{\cos^2(t)} e^{\tan t} dt = \left[e^{\tan(t)}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} = e - e^{\sqrt{3}}$ e) on pose $\begin{pmatrix} u(t) = t \Rightarrow u'(t) = 1 \\ v'(t) = e^{-2t} \Leftarrow v(t) = -\dfrac{1}{2}e^{-2t} \end{pmatrix}$ Donc

$\int_0^1 te^{-2t}\, dt = \left[t.\left(-\dfrac{1}{2}e^{-2t}\right)\right]_0^1 - \int_0^1\left(-\dfrac{1}{2}e^{-2t}\right)dt = -\dfrac{1}{2}e^{-2} + \dfrac{1}{2}\left[-\dfrac{1}{2}e^{-2e}\right]_0^1 = -\dfrac{1}{2}e^{-2} - \dfrac{1}{4}e^{-2} + \dfrac{1}{4}$

Exercice N°4 :

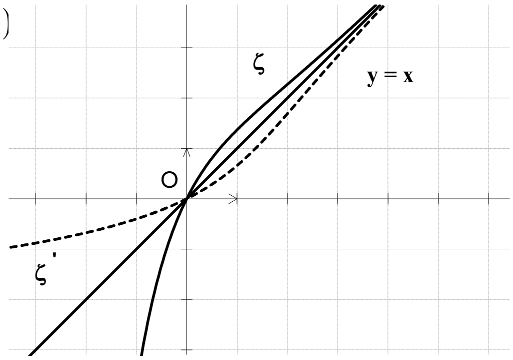
1. a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, c) La droite D : y = x , de coefficient 1, est une asymptote à (ζ) en +∞ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$, d) (ζ) admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{j})$ dirigée au voisinage de -∞ alors $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$.

2.

x	$-\infty$		$+\infty$
f'(x)		+	
f(x)	$-\infty$	↗	$+\infty$

3. f est strictement croissante donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$

4. $(\zeta')=S_{D:y=x}(\zeta)$



5. On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$, d'autre part on a :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+xe^{-x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(a+e^{-x}\right)}{\cancel{x}}=\lim_{x\to+\infty}a+e^{-x}=a$$

donc a = 1.

6. $A=\int_0^1\left|f(x)-f^{-1}(x)\right|dx=2\int_0^1\left|f(x)-x\right|dx=2\int_0^1\left(f(x)-x\right)dx$

$=2\int_0^1 xe^{-x}\,dx$ on pose : $\begin{pmatrix} u(x)=x\Rightarrow u'(x)=1 \\ v'(x)=e^{-x}\Leftarrow v(x)=-e^{-x}\end{pmatrix}$ alors :

$$A=2\left(\left[x\times\left(-e^{-x}\right)\right]_0^1-\int_0^1-e^{-x}\,dx\right)=2\left(-e^{-1}-\left[e^{-x}\right]_0^1\right)=2\left(-e^{-1}-e^{-1}+1\right)=2\left(1-2e^{-1}\right)\times \text{ua}$$

Exercice N°5 :1. a) la fonction : $x\mapsto\left(e^{-x}-1\right)^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[0,+\infty[$.

$\forall x\in[0,+\infty[,\ f'(x)=2\left(-e^{-x}\right)\left(e^{-x}-1\right)=2e^{-x}\left(1-e^{-x}\right)$

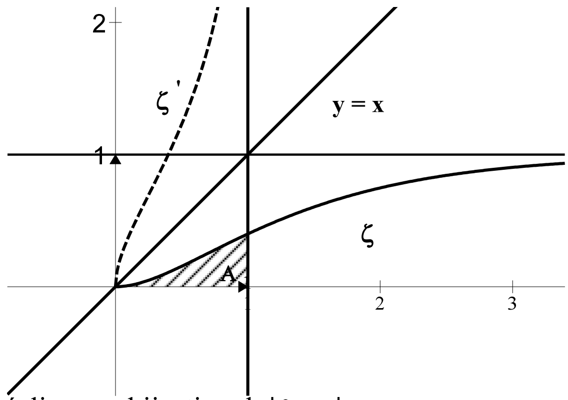
b) $D_f=[0,+\infty[$. Le signe de f' est celui de $\left(1-e^{-x}\right)$.

$1-e^{-x}\ge 0\Leftrightarrow e^{-x}\le 1\Leftrightarrow -x\le 0\Leftrightarrow x\ge 0$

x	0		$+\infty$
f'(x)		+	
f(x)	0	↗	1

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x}-1\right)^2=1$ Alors la droite D :y =1 est une asymptote horizontale à (ζ) en +∞.

2.a)



b) $A=\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)\times(\text{u.a})$ Calculons : $\int_0^1 f(x)\,dx$

$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\left(e^{-x}-1\right)^2dx=\int_0^1\left(e^{-2x}-2e^{-x}+1\right)dx$

$=\int_0^1 e^{-2x}dx-2\int_0^1 e^{-x}dx+\int_0^1 dx=\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}+2e^{-x}+x\right]_0^1=-\frac{1}{2}e^{-2}+2e^{-1}-\frac{1}{2}$

or 1.u.a = 4cm² alors $A=\left(-\frac{1}{2}e^{-2}+2e^{-1}-\frac{1}{2}\right)\times 4\text{cm}^2$

$=\left(-2e^{-2}+8e^{-1}-2\right)\text{cm}^2$

1. a) f est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $f([0,+\infty[)=[0,1[=J$ b) $\zeta'=S_{\Delta:y=x}(\zeta)$.

c) A' = Aire du carrée – 2.A = 4.cm² -2.$\left(-2e^{-2}+8e^{-1}-2\right)\text{cm}^2=\left(8+4e^{-2}-16e^{-1}\right)\text{cm}^2$

3.a) $f^{-1}:[0,1[\to[0,+\infty[\quad x\mapsto f^{-1}(x)=y$; $f^{-1}(x)=y\Leftrightarrow x=f(y)\Leftrightarrow\left(e^{-y}-1\right)^2=x\Leftrightarrow\sqrt{\left(e^{-y}-1\right)^2}=\sqrt{x}\Leftrightarrow\left|e^{-y}-1\right|=\sqrt{x}$ or $e^{-y}-1\le 0\ \forall y\in[0,1[$ on aura : $1-e^{-y}=\sqrt{x}\Leftrightarrow e^{-y}=1-\sqrt{x}\Leftrightarrow\ln\left(e^{-y}\right)=\ln\left(1-\sqrt{x}\right)\Leftrightarrow -y=\ln\left(1-\sqrt{x}\right)\Leftrightarrow y=-\ln\left(1-\sqrt{x}\right)$

ainsi $\forall x[0,1[,\ f^{-1}(x)=-\ln\left(1-\sqrt{x}\right)$.

b) On a f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et $\forall x \in]0,+\infty[, f'(x) \neq 0$ donc f^{-1} est dérivable sur $f(]0,+\infty[) =]0,1[$ .Et on a

$\forall x \in [0,1[: (f^{-1})'(x) = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1-\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}-2x}$.

4.a) $I_\alpha = \int_\alpha^{\frac{1}{4}} \dfrac{1}{\sqrt{x}-x}dx = \int_\alpha^{\frac{1}{4}} 2.(f^{-1})'(x)dx = \left[2.(f^{-1})(x)\right]_\alpha^{\frac{1}{4}} = 2.(f^{-1})\left(\dfrac{1}{4}\right) - 2.(f^{-1})(\alpha) = -2\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) - 2.(f^{-1})(\alpha)$

$= 2\ln 2 - 2.(f^{-1})(\alpha)$ D'où le résultat. b) $\lim\limits_{\alpha\to 0^+}(f^{-1})(\alpha) = \lim\limits_{\alpha\to 0^+} -\ln(1-\sqrt{\alpha}) = 0$ donc $\lim\limits_{\alpha\to 0^+} I_\alpha = 2\ln 2$

Exercice N°6:1.a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ b) $f'(2) = 0$, $f'(0) = 0$

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x-3)}{x-3} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(y)}{y} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(y)-0}{y} = f'(0) = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x} = -\infty$ car C_f admet une branche parabolique de

direction $(O,\vec{j})$ et f est strictement positive au voisinage de -∞ $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{x-2}{f(x)-\frac{4}{e}} = \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{\frac{f(x)-\frac{4}{e}}{x-2}} = +\infty$

car $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)-\frac{4}{e}}{x-2} = f'_d(2) = 0$ et f est décroissante sur $]2,+\infty[$ alors $f'(x) > 0$ pour tout $x > 2$.

c) (ζ) admet la droite d'équation y = 0 comme asymptote horizontale au voisinage de +∞ et admet au voisinage de -∞ une branche parabolique de direction $(O,\vec{i})$.

d)

x	-∞		0		2		+∞
f'(x)		−	0	+	0	−	
f(x)	+∞	↘	0	↗	$\frac{4}{e}$	↘	0

2.Puisqu'on a f'(2) = 0donc la courbe de f' coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 2 donc la courbe 3 n'est pas celle de f'. On a f est décroissante sur $]-\infty,0[$ donc $f'(x) \le 0\quad \forall x \in]-\infty,0[$ donc la courbe de f' est la courbe n°1.

3. $f'(x) = (2ax - ax^2 - b)e^{1-x}$ or f'(0) = 0 donc –b = 0 alors b =0.

$f(2) = \dfrac{4}{e} \Leftrightarrow (4a+b)e^{-1} = \dfrac{4}{e} \Leftrightarrow 4a+b = 4$ or $b = 0$ alors $a = 1$ Donc $f(x) = x^2e^{1-x}$.

4. $A = \left(\int_0^1 x^2e^{1-x}\ dx\right)\times$ua on pose : $\begin{cases} u(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x \\ v'(x) = e^{1-x} \Leftarrow v(x) = -e^{1-x} \end{cases}$ donc

$\int_0^1 x^2e^{1-x}\ dx = \left[x^2\times(-e^{1-x})\right]_0^1 - \int_0^1 2x(-e^{1-x})\ dx = -1+2\int_0^1 xe^{1-x}\ dx$ par une autre intégration par parties : on pose

$\begin{cases} u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^{1-x} \Leftarrow v(x) = -e^{1-x} \end{cases}$ on aura : $\int_0^1 x^2e^{1-x}\ dx = 1-2\left(\left[x\times(-e^{1-x})\right]_0^1 - \int_0^1 -e^{1-x}\ dx\right)$

$= -1+2\left(-1+\left[-e^{1-x}\right]_0^1\right) = -1+2(-1-1+e) = -1+2(-2+e) = -5+2e$ .on aura $A = (-5+2e)$u.a

Exercice N°7:1.la fonction : $x \mapsto 1+e^{-x}$ est dérivable et positive sur $\mathbb{R}$ alors la fonction $f : x \mapsto \ln(1+e^{-x})$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} < 0\quad \forall x \in \mathbb{R}$. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

x	-∞		+∞
f'(x)		+	
f(x)	+∞	↘	0

2.a) $f(x) = \ln(1+e^{-x}) = \ln\left[e^{-x}(e^x+1)\right] = \ln(e^{-x}) + \ln(e^x+1) = -x + \ln(e^x+1)$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-x)\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\ln(e^x+1) = 0$ alors la droite D : y = -x est une asymptote au voisinage de +∞.

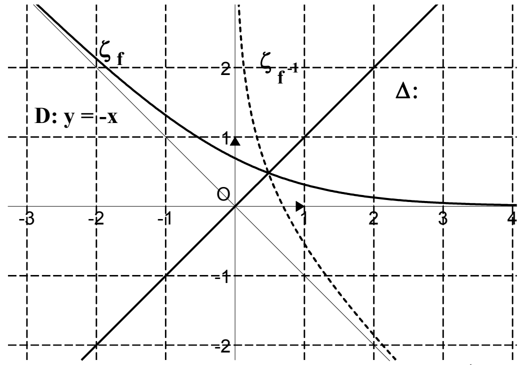
c) On a : $1+e^x > 1\quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \ln(1+e^x) > 0 \Rightarrow \zeta_f$ est toujours au desus de D

3.a) Soit : $\varphi(x) = f(x) - x,\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \varphi'(x) = f'(x) - 1 < 0$

x	-∞		+∞
φ'(x)		−	
φ(x)	+∞	↘	-∞

$\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=-\infty \Rightarrow \varphi$ est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R} \Rightarrow \varphi$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\varphi(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ or $0\in\mathbb{R} \Rightarrow$ l'équation $\varphi(x)=0$ admet une unique solution α alors $\varphi(\alpha)=0 \Leftrightarrow f(\alpha)=\alpha$.

Conclusion : ζ_f coupe $\Delta : y = x$ en un seul point d'abscisse.



$\varphi(0)=\ln(2)-0=\ln(2)>0$ et $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{e}}\right)-\frac{1}{2}\simeq -0,02<0$

$\Rightarrow \varphi(0)\times\varphi\left(\frac{1}{2}\right)<0 \Rightarrow \alpha\in\left]0,\frac{1}{2}\right[$

4.a) f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ alors f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})=]0,+\infty[=J$.

b) $\zeta_{f^{-1}}=S_{\Delta:y=x}(\zeta_f)$. Voir figure.

c) Soit $x\in]0,+\infty[$ et $y\in\mathbb{R}$. On a : $f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x \Leftrightarrow \ln\left(1+e^{-y}\right)=x \Leftrightarrow 1+e^{-y}=e^{x} \Leftrightarrow e^{y}=\frac{1}{e^{x}-1} \Leftrightarrow y=\ln\left(\frac{1}{e^{x}-1}\right)$.

Conclusion : $\forall x\in]0,+\infty[,\ f^{-1}(x)=\ln\left(\frac{1}{e^{x}-1}\right)$

5.Soit $M(x,y)\in\zeta_f$ et $M'(x',y')$ son image par $h_{\left(O,\frac{1}{2n}\right)}$ signifie que : $\overrightarrow{OM'}=\frac{1}{2n}\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=\frac{1}{2n}x \\ y'=\frac{1}{2n}y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2n.x' \\ y=2n.y' \end{cases} \Rightarrow 2n.y'=\ln\left(1+e^{-2n.x'}\right) \Rightarrow y'=\frac{1}{2n}\ln\left(1+e^{-2n.x'}\right)$. Conclusion :si f_n est la fonction associe à ζ_n alors : $f_n(x)=\frac{1}{2n}\ln\left(1+e^{-2n.x}\right)$

B/1.a) $g'(x)=\frac{1}{1+t}-1=\frac{-t}{1+t}<0\ \forall t\in]0,+\infty[$. $\quad h'(t)=\frac{1}{1+t}-1+t=\frac{t^2}{1+t}>0\ \forall t>0$

x	0		+∞
g'(x)		−	
g(x)	0	↘	

x	0		+∞
h'(x)		+	
h(x)	0	↗	

$\lim\limits_{t\to0^+}g(t)=0$ $\qquad$ $\lim\limits_{t\to0^+}h(t)=0$

b) D'une part g est continue et strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ et $\lim\limits_{t\to0^+}g(t)=0$ donc $g(t)<0$ pour tout $t>0. \Rightarrow \ln(1+t)-t<0 \Leftrightarrow \ln(1+t)<t$. D'autre part h est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et $\lim\limits_{t\to0^+}h(t)=0$ donc $h(t)>0\ \forall t>0 \Rightarrow \ln(1+t)-t+\frac{t^2}{2}>0 \Leftrightarrow \ln(1+t)>t-\frac{t^2}{2}$ d'où le résultat.

c) On pose $t=e^{-x}>0 \Rightarrow e^{-x}-\frac{e^{-2x}}{2}<\ln\left(1+e^{-x}\right)<e^{-x}$

2. a) $u_{n+1}-u_n=\left(1+\frac{1}{e^{1+n}}\right)u_n-u_n=\frac{1}{e^{1+n}}u_n$. D'une part on a $\frac{1}{e^{n+1}}>0$, d'autre part montrons que: $u_n>0$. En effet $u_1>0$ vraie. Supposons que : $u_n>0$ et montrons que $u_{n+1}>0$. Comme $u_n>0$ et $\left(1+\frac{1}{e^{n+1}}\right)>0$ alors $u_{n+1}=\left(1+\frac{1}{e^{n+1}}\right)u_n>0$ et par suite croissante.

b) Montrons par récurrence pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\ln(u_n)=\sum\limits_{k=1}^{k=n}f(k)$.

Pour n = 1 ; $\ln(u_1)=\ln\left(1+e^{-1}\right)$ et $\sum_{k=1}^{1} f(k)=f(1)=\ln\left(1+e^{-1}\right)=u_1$ d'où l'égalité est vraie pour n = 0.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, supposons que $\ln(u_n)=\sum_{k=1}^{k=n} f(k)$ et montrer que $\ln(u_{n+1})=\sum_{k=1}^{k=n+1} f(k)$.

On a $\ln(u_{n+1})=\ln\left[\left(1+\frac{1}{e^{n+1}}\right)u_n\right]=\ln\left(1+\frac{1}{e^{n+1}}\right)+\ln(u_n)=\ln\left(1+e^{-(n+1)}\right)+\sum_{k=1}^{k=n} f(k)=f(n+1)+\sum_{k=1}^{k=n} f(k)=\sum_{k=1}^{k=n+1} f(k)$.

3. a) D'après 1-c) $\forall k\in\{1,2,3,.........,n\}: e^{-k}-\frac{e^{-2k}}{2}<f(k)<e^{-k} \Leftrightarrow \frac{1}{e^k}-\frac{1}{2e^{2k}}<f(k)<\frac{1}{e^k}$

$\Rightarrow\left(\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{e^k}-\frac{1}{2e^{2k}}\right)<\sum_{k=1}^{k=n} f(k)<\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{e^k}\Rightarrow S_1-\frac{1}{2}S_2<\ln(u_n)<S_1$

b) On a : $\forall n\in\mathbb{N}^*;\ln(u_n)<S_1\Rightarrow u_n<e^{S_1}$ or $S_1=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{e^k}=\frac{1-e^{-n}}{1-e^{-1}}.e^{-1}=\frac{1-e^{-n}}{e-1}<\frac{1}{e-1}\Rightarrow e^{S_1}<e^{\frac{1}{e-1}}$ donc $u_n<e^{\frac{1}{e-1}}\Rightarrow u_n$ est majorée par $e^{\frac{1}{e-1}}$. U est croissante et majorée alors u est convergente.

c) On a $\forall n\in\mathbb{N}^*: S_1-\frac{1}{2}S_2<\ln(u_n)<S_1$ et on a, d'une part, $\lim_{n\to+\infty} S_1=\lim_{n\to+\infty}\frac{1-e^{-n}}{e-1}=\frac{1}{e-1}$ car $e^{-1}\in\left]0;1\right[$, d'autre part,

$\lim_{n\to+\infty}\left(S_1-\frac{1}{2}S_2\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1-e^{-n}}{e-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{e^2}.\frac{1-e^{-2n}}{1-e^{-2}}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1-e^{-n}}{e-1}-\frac{1}{2}\frac{1-e^{-2n}}{e^2-1}\right)=\frac{1}{e-1}-\frac{1}{2\left(e^2-1\right)}$ car $e^{-2}\in\left]-1;1\right[$.

$S_1-\frac{1}{2}S_2$ converge vers $\frac{1}{e-1}-\frac{1}{2\left(e^2-1\right)}=\frac{2e+1}{2\left(e^2-1\right)}$ et comme $\lim_{n\to+\infty}u_n=L$ et la fonction $:x\mapsto\ln(x)$ est continue en L car $L>0$ puisque $u_n>0$ alors la suite $\ln(u_n)$ converge vers ln(L) et $\frac{2e+1}{2\left(e^2-1\right)}\le\ln(L)\le\frac{1}{e-1}$

<u>Exercice n°8:</u> A/1. Calculons : $\int_0^x te^t\,dt$. On pose $\begin{pmatrix}u(t)=t\Rightarrow u'(t)=1\\ v'(t)=e^t\Leftarrow v(t)=e^t\end{pmatrix}$ On aura :

$\int_0^x te^t\,dt=\left[te^t\right]_0^x-\int_0^x e^t\,dt=xe^x-0-\left[e^t\right]_0^x=xe^x-e^x+1=g(x)$ .alors : $g(x)=\int_0^x te^t\,dt$.

2. a) $0\le t\le x\Leftrightarrow 1\le e^t\le e^x\Leftrightarrow t\le te^t\le te^x$ et les fonctions : $t\mapsto te^t, t\mapsto te^x$ et $t\mapsto t$ sont continues sur $[0,x]$ alors :

$\int_0^x t\,dt\le\int_0^x te^t\,dt\le e^x\int_0^x t\,dt\Rightarrow\frac{x^2}{2}\le g(x)\le\frac{x^2}{2}e^x$.

b) $x<0\Rightarrow x\le t\le 0\Leftrightarrow e^x\le e^t\le 1\Leftrightarrow te^x\le te^t\le t\Rightarrow e^x\int_0^x t\,dt\le\int_0^x te^t\,dt\le\int_0^x t\,dt\Rightarrow\frac{x^2}{2}e^x\le g(x)\le\frac{x^2}{2}$.

c) On a : $\lim_{x\to0^+}\frac{g(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$ et $\lim_{x\to0^-}\frac{g(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$ (d'après les deux inégalitées) donc $\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$.

B/1.a) $\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{e^x-1}{x}}=\frac{1}{1}=1=f(0)$ alors f est continue en0.

b) $\frac{f(x)-1}{x}=\frac{x-\left(e^x-1\right)}{x\left(e^x-1\right)}=\frac{x-e^x+1}{x\left(e^x-1\right)}$ et ona : $\frac{g(x)}{x\left(e^x-1\right)}-1=\frac{xe^x-e^x+1-x\left(e^x-1\right)}{x\left(e^x-1\right)}=\frac{xe^x-e^x+1-xe^x+x}{x\left(e^x-1\right)}$

$=\frac{\cancel{xe^x}-e^x+1\cancel{-xe^x}+x}{x\left(e^x-1\right)}=\frac{x-e^x+1}{x\left(e^x-1\right)}$ donc $\frac{f(x)-1}{x}=\frac{g(x)}{x\left(e^x-1\right)}-1$.

c) $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{x\left(e^x-1\right)}-1=\lim_{x\to0}\frac{g(x)x}{x^2\left(e^x-1\right)}-1=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$ alors $f'(0)=-\frac{1}{2}$.

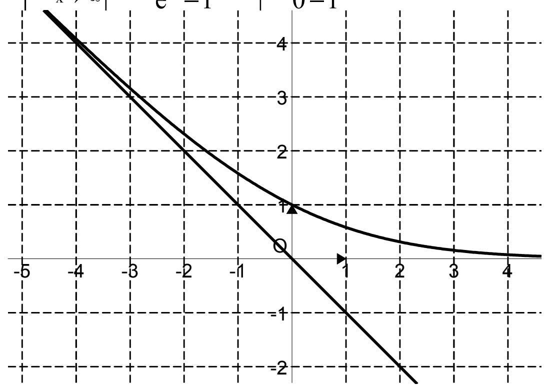
d) $f'(x)=\frac{e^x-1-xe^x}{\left(e^x-1\right)^2}=\frac{-g(x)}{\left(e^x-1\right)^2}$

x	-∞		0		+∞
f'(x)		—	0	—	
f(x)	+∞	↘	1	↘	0

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{e^x-1} = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^x-1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}} = 0$.

2.a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x-1} = -1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \left[f(x)-(-x)\right] = \lim\limits_{x\to-\infty} \left[\frac{x+x(e^x-1)}{e^x-1}\right] = \lim\limits_{x\to-\infty} \left[\frac{\cancel{x}+xe^x-\cancel{x}}{e^x-1}\right] = \frac{0}{0-1} = 0$ alors C_f admet une asymptote oblique Δ : y = -x au voisinage de -∞.

b) on a : $\lim\limits_{+\infty} f = 0$ alors C_f admet une asymptote horizontale d'équation : y = 0 au voisinage de +∞.



Exercice N°9:

I-1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^x} = \frac{+\infty}{1+0} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left[\frac{1}{1+e^x}\,\frac{e^{-x}}{x}\right]$

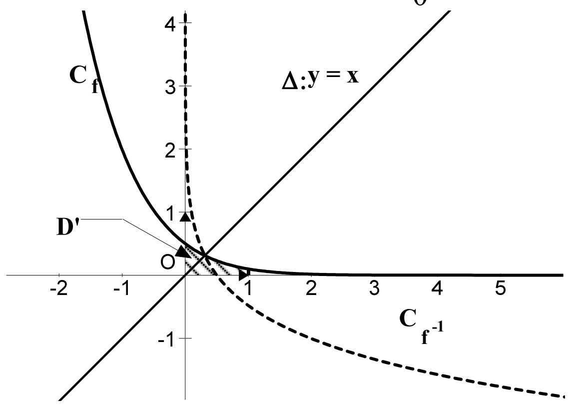
$= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{1+e^x} \underbrace{\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x}}_{\text{on pose } X=-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{1+e^x} = 1\times(-\infty) = -\infty \Rightarrow C_f$ admet une branche infinie parabolique de direction $(O,\vec{j})$ au voisinage de -∞.

2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$. $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x) = \frac{-e^{-x}(1+e^x)-e^x e^{-x}}{(1+e^x)^2} = \frac{-e^{-x}-2}{(1+e^x)^2} < 0$ d'où le tableau de variation :

x	-∞		+∞
f'(x)		−	
f(x)	+∞	↘	0

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\frac{e^{-x}}{1+e^x}\right] = 0 \Rightarrow$ La droite d'équation y = 0 est une asymptote horizontale de C_f au voisinage de +∞.

3. Comme f(x) >0 pour tout $x\in[0;1]$ alors $I = \int_0^1 f(x)\,dx$ désigne l'aire de la partie du plan limitée par : C_f, $(O,\vec{i})$, y = 0 et les droites d'équations respectives x = 0 et x = 1.



II- 1.f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R} \Rightarrow$ f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = J$ et

$J = f(]-\infty,+\infty[) =]\lim\limits_{+\infty} f;\lim\limits_{-\infty} f[=]0,+\infty[$.

2. $C_{f^{-1}} = S_{\Delta:y=x}(C_f)$ (voir figure).

3. $\forall x\in J$ et $\forall y\in\mathbb{R}$, on a : $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = f(y) \Leftrightarrow x = \frac{e^{-y}}{1+e^y} \Leftrightarrow e^{-y} = x + xe^y \Leftrightarrow e^y e^{-y} = e^y x + xe^y e^y$

$\Leftrightarrow x(e^y)^2 + xe^y - 1 = 0$. Posons $t = e^y > 0$ l'équation devient $x.t^2 + x.t - 1 = 0, \Delta = b^2-4ac = x^2+4x > 0$ car $x > 0$

donc : $t_1 = \frac{-x-\sqrt{x^2+x}}{2x}$ et $t_2 = \frac{-x+\sqrt{x^2+x}}{2x}$ comme $t_1 < 0$ alors $e^y = \frac{-x+\sqrt{x^2+x}}{2x} \Leftrightarrow y = \ln\left(\frac{-x+\sqrt{x^2+x}}{2x}\right)$.

III- 1. $k = \int_0^1 e^{-x}\ln(1+e^{-x})dx$. On pose : $\begin{cases} u'(x) = e^{-x} \Leftarrow u(x) = -e^{-x} \\ v(x) = \ln(1+e^{-x}) \Leftarrow v'(x) = \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} \end{cases}$ on aura :

$k = \left[-e^{-x}\ln(1+e^{-x})\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{(-e^{-x})}{1+e^{-x}}.(-e^{-x})dx = -e^{-1}\ln(1+e^{-1}) + \ln 2 - \int_0^1 \frac{1}{e^{-x}}\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx = \ln 2 - \frac{1}{e}\ln\left(1+\frac{1}{e}\right) - \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^x}dx$

donc : $K = \ln 2 - \frac{1}{e}\ln\left(\frac{e+1}{e}\right) - I$.

2. a) Soit F la primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de ln qui s'annule en 1 alors $F(x)=\int_1^x \ln t\,dt=[t\ln t-t]_1^x=x\ln x-x+1$

b) $k=\int_0^1 e^{-x}\ln(1+e^{-x})dx=-\int_0^1 \underbrace{(1+e^{-x})'\ln(1+e^{-x})dx}_{\text{Dérivée de la composée de deux fonctions}}=-[F(1+e^{-x})]_0^1=-[F(1+e^{-1})-F((1+e^{-0}))]$

c) $K=\ln 2-\frac{1}{e}\ln\left(\frac{e+1}{e}\right)-I\Rightarrow I=\ln 2-\frac{1}{e}\ln\left(\frac{e+1}{e}\right)-K$ donc $I=-\ln 2-\frac{1}{e}+\ln(1+e)$.

3. On sait que la symétrie axiale conserve les aires donc $\text{Aire}(D)=\text{Aire}(D')$ où $D'=S_\Delta(D)$ comme les bords du D sont $C_{f^{-1}}$, $(O,\vec{i})$: $y=0$; D_1 : $y=1$ et $(O,\vec{j})$: $x=0\Rightarrow$ Les bords de D' sont C_f, $(O,\vec{j})$: $x=0$; D_1' : $x=1$ et $y=0$

donc $\text{Aire}(D)=\text{Aire}(D')=\int_0^1 f(x)\,dx=I=-\ln 2-\frac{1}{e}+\ln(1+e)$.

<u>Exercice N°10:</u>A- 1. La fonction $x\mapsto\frac{e^x-1}{x}$ est continue sur $]0,+\infty[$. Et $\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{e^x-1}{x}=1=f(1)$ donc f est continue sur $[0,+\infty[$ .2. f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x\in]0,+\infty[$, $f'(x)=\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}$. Le signe de f'(x) est celui de la fonction définie sur $[0,+\infty[$: $\varphi(x)=xe^x-e^x+1\Rightarrow\varphi'(x)=(e^x+xe^x)-e^x=xe^x>0\ \forall\in]0,+\infty[\Rightarrow\varphi$ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ or $\varphi(0)=0\Rightarrow\ \varphi(x)=xe^x-e^x+1>0\ \forall x\in]0,+\infty[$. D'où f'(x) > 0

3. a) g est continue sur $[0,h]$ avec h > 0 et g est dérivable sur $]0,h[$. Donc d'après le Théorème des accroissements finis, il existe un réel $c\in]0,h[$ tel que : $g'(c)=\frac{g(h)-g(0)}{h}$ or $\begin{cases}g(x)=2\frac{(e^h-1-h)}{h^2}.x-e^x+1\\ g(h)=0\\ g(0)=0\end{cases}$ donc il existe $c\in]0,h[$ tel que :

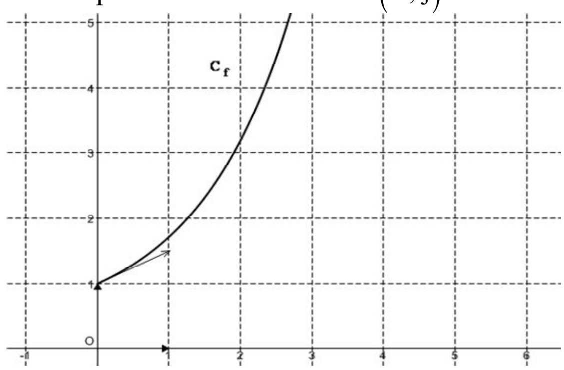
$g'(c)=0\Rightarrow 2\frac{(e^h-1-h)}{h^2}.c-e^c+1=0\Rightarrow\frac{e^h-1-h}{h^2}=\frac{1}{2}f(c)$ .b) $\lim_{h\to0^+}\left[\frac{e^h-1-h}{h^2}\right]=\lim_{c\to0^+}\frac{1}{2}f(c)=\frac{1}{2}\underbrace{f(0)}_{=1}=\frac{1}{2}$.

c) $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{\frac{e^x-1}{x}-x}{x^2}\right]=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{e^x-1-x}{x^2}\right]=\frac{1}{2}$ donc : $f_d'(0)=\frac{1}{2}$

d) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}\right)=+\infty-0=+\infty$

x	0		+∞
f'(x)	$\frac{1}{2}$	+	
f(x)	1	↗	+∞

$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right)=+\infty-0=+\infty\Rightarrow$ Cf admet une branche parabolique de direction celle de $(O,\vec{j})$.



B- 1. a) f est continue sur $\mathbb{R}_+$, $0\in\mathbb{R}_+$ et $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $e^x>0$ donc F(x) existe pour tout réel x

b) f est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc elle admet une primitive G sur $\mathbb{R}_+$ qui s'annule en 0. D'où $F(x)=G(e^x)$ Comme les fonctions : $x\mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et G est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ alors F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$\forall x\in\mathbb{R}$, $F'(x)=e^xf(e^x)=\cancel{e^x}\frac{e^{e^x}-1}{\cancel{e^x}}=e^{e^x}-1$.

2. $\lim_{x\to-\infty}F(x)=\lim_{x\to-\infty}G(e^x)$ or $\lim_{x\to-\infty}e^x=0^+$ et $\lim_{x\to0^+}G(x)=G(0)=0$ donc $\lim_{x\to-\infty}F(x)=0$.

3. a) On pose $u(t)=e^t-t$ avec $t\in\mathbb{R}_+\Rightarrow u'(t)=e^t-1\geq0\Rightarrow$ u est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ or u(0) =0 donc : $u(t)\geq0\ \forall t\in\mathbb{R}_+$ d'où : $e^t\geq t$, $\forall t\in\mathbb{R}_+$.

$\forall x\in\mathbb{R}_+$ et $\forall t\in\left[1,e^x\right]$, les fonctions $t\mapsto\frac{e^t-1}{t}$ et $t\mapsto\frac{t-1}{t}$ sont continues sur $\left[1,e^x\right]$ et on a :

$e^t\geq t,\ \forall t\in\left[1,e^x\right]\Leftrightarrow\frac{e^t-1}{t}\geq\frac{t-1}{t},\ \forall t\in\left[1,e^x\right]\Rightarrow\int_1^{e^x}\frac{e^t-1}{t}\,dt\geq\int_1^{e^x}\frac{t-1}{t}dt\Leftrightarrow\int_1^0\frac{e^t-1}{t}\,dt+\int_0^{e^x}\frac{e^t-1}{t}\,dt\geq\int_1^{e^x}\frac{t-1}{t}dt$

$F(x)\geq\int_1^{e^x}\frac{t-1}{t}dt+\int_0^1\frac{e^t-1}{t}\,dt\Leftrightarrow F(x)\geq\int_1^{e^x}\frac{t-1}{t}dt+\underbrace{\int_0^1 f(t)\,dt}_{\geq 0}\geq\int_1^{e^x}\frac{t-1}{t}dt$ d'où le résultat.

b) $F(x)\geq\int_1^{e^x}\frac{t-1}{t}dt$ or $\int_1^{e^x}\frac{t-1}{t}dt=\left[t-\ln t\right]_0^{e^x}=e^x-x-1$ Donc $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ F(x)\geq e^x-x-1$ et on a

x	$-\infty$		$+\infty$
$F'(x)$		$+$	
$F(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}e^x-x-1=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\frac{e^x}{x}-1-\frac{1}{x}\right)=+\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \frac{F(x)}{x}\geq\frac{e^x}{x}-1-\frac{1}{x}$ or $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}-1-\frac{1}{x}\right)=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=+\infty$

c) $\forall x\in\mathbb{R},\ F'(x)=e^{e^x}-1$ et $\forall x\in\mathbb{R},\ e^x>0\Rightarrow\forall x\in\mathbb{R},e^{e^x}>1\Rightarrow\forall x\in\mathbb{R},F'(x)>0$

Exercice N°11: **1.** $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0; f(1)=1$ et $f'(1)=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x+5)}{x+5}=+\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x+5)}{x+5}=0$ et $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x-1}{f(x)-1}=+\infty$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

2.

3.a) $A_n=\int_1^n te^{1-t}\,dt$ On pose : $\begin{cases}u(t)=t\Rightarrow u'(t)=1\\ v'(t)=e^{1-t}\Leftarrow v(t)=-e^{1-t}\end{cases}$ on aura $A_n=\left[-te^{1-t}\right]_1^n+\int_1^n e^{1-t}\,dt$

$=-ne^{1-n}+1+\left[-e^{1-t}\right]_1^n=-ne^{1-n}+1-e^{1-n}+1=-(n+1)e^{1-n}+2$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}A_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[-(n+1)e^{1-n}+2\right]=\lim\limits_{n\to+\infty}-e\left(\frac{n}{e^n}+\frac{1}{e^n}\right)+2=\lim\limits_{n\to+\infty}-e\left(\frac{1}{\frac{e^n}{n}}+\frac{1}{e^n}\right)+2=-e\left(\frac{1}{+\infty}+\frac{1}{+\infty}\right)+2=2$

4.a) $k-1\leq t\leq k;\ [k-1;k]\subset[1;+\infty[\ \forall k\geq2$. $t\leq k;$ f est décroissante sur $[1;+\infty[$ donc $f(k)\leq f(t)$ or : $t\mapsto f(k)$ est une fonction continue sur $[k-1;k]$ (fonction constante) et $t\mapsto f(t)$ est continue sur $[k-1;k]$ alors :

$\int_{k-1}^k f(k)\,dt\leq\int_{k-1}^k f(t)\,dt\Leftrightarrow f(k)\underbrace{\int_{k-1}^k dt}_{1}\leq\int_{k-1}^k f(t)\,dt\Leftrightarrow f(k)\leq\int_{k-1}^k f(t)\,dt$.

b)

$\left.\begin{array}{l}\text{Pour } k=2,\text{ on a } f(2)\leq\int_1^2 f(t)\,dt\\ \text{Pour } k=3,\text{ on a } f(3)\leq\int_2^3 f(t)\,dt\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \text{Pour } k=n,\text{ on a } f(n)\leq\int_{n-1}^n f(t)\,dt\end{array}\right\}$ on somme membre à menbre ces inégalitées et après simplication on obtient : $U_n-f(1)\leq\int_1^n f(t)dt$ donc $U_n\leq A_n+f(1)$ or $A_n\leq2$ alors $U_n\leq2+1=3$

c) $U_{n+1}-U_n=(n+1)e^{-n}\geq0$ donc U est une suite croissante et comme U est majorée par 3 alors U est une suite convergente.

Exercice N°12: 1.a) f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_n'(x)=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}e^{\frac{x}{n}}=\frac{n-(n+1)e^{\frac{x}{n}}}{n(n+1)}$ elle prend le signe de $n-(n+1)e^{\frac{x}{n}}$.

$n-(n+1)e^{\frac{x}{n}}\geq0\Leftrightarrow(n+1)e^{\frac{x}{n}}\leq n\Leftrightarrow e^{\frac{x}{n}}\leq\frac{n}{(n+1)}\Leftrightarrow\frac{x}{n}\leq\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\Leftrightarrow x\leq n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$.

$n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)=a$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f_n(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\underbrace{\frac{x}{n+1}-e^{\frac{x}{n}}}_{\text{FID}}\right)$

x	$-\infty$		α_n		a		0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f_n(a)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

$$= \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{x}{n}}_{+\infty}\left(\underbrace{\frac{n}{x}}_{0}+\frac{n}{n+1}-\underbrace{\frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}}_{+\infty}\right)=-\infty$$ on a : $n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)<0$ et $f_n(0)=0$ or f_n est décroissante sur $[a,0]$ donc $f_n(a)>0$.

b) La restriction de f_n à $]-\infty,a[$ est continue et strictement croissante donc elle réalise une bijection de $]-\infty,a[$ sur $]-\infty,f_n(a)[$ comme $0\in\,]-\infty,f_n(a)[$ donc il existe une unique solution $\alpha_n\in\,]-\infty,a[$ tel que : $f_n(\alpha_n)=0$. On a

.

2. $g(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+\frac{2}{x};\frac{x-1}{x+1}<0\Leftrightarrow x\in\,]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$. g est dérivable

sur $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ et $g'(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x^2}=\frac{2}{x^2(x^2-1)}>0$ pour tout $x\in\,]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$.

3. $\forall x\geq 1,\ g(x)<0$ donc $g(n)<0$ dès que $n\geq 2$.

x	$-\infty$		-1	1		$+\infty$
g'(x)		+	//	//	+	
g(x)	0	↗	$+\infty$ //	// $-\infty$	↗	0

$f_n(-2)=1-\frac{2}{n+1}-e^{\frac{-2}{n}}<0\Leftrightarrow e^{-\frac{2}{n}}>\frac{n-1}{n+1}\Leftrightarrow -\frac{2}{n}>\ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right)$

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right)+\frac{2}{n}<0\Leftrightarrow \underbrace{g(n)<0}_{\text{est vraire}}$ d'où on bien $f_n(-2)<0$,

Il reste alors $\alpha_n<-2$? on a $f_n(-2)<f_n(\alpha_n)$ et comme f_n est croissante sur $]-\infty,a[\Rightarrow -2<\alpha_n$.

4. $f\left(2n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right)=1+\frac{2n}{n+1}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)-e^{2\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}=1+\frac{2n}{n+1}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)-\left(\frac{n}{n+1}\right)^2=\frac{2n+1}{(n+1)^2}+\frac{2n}{n+1}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

$=\frac{2n}{n+1}\left[\frac{2n+1}{2n(n+1)}+\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right]$

5. a) $h'(x)=\frac{4x(x+1)-(2x+1)(4x+2)}{4x^2(x+1)^2}+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{-4x^2-4x-2}{4x^2(x+1)^2}+\frac{1}{x(x+1)}=\frac{-2}{4x^2(x+1)^2}<0$

x	0		$+\infty$
h'(x)		−	
h(x)		↘	0

d'où : $\forall x>0;\ \ h(x)>0$. On a $f_n\left[2n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right]$

$=\frac{2n}{n+1}\left[\frac{2n+1}{2n(n+1)}+\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right]=\frac{2n}{n+1}h(n)>0$ d'où le résultat.

b) $f_n(-2)<f_n(\alpha_n)<f_n\left[2n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right]$ comme f_n est strictement strictement croissante sur $]0,+\infty[$

alors $-2<\alpha_n<2n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$.On a $n<2n\Rightarrow 2n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)<n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)=a$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}2n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}{\frac{n}{n+1}-1}\times\left(\frac{-2n}{n+1}\right)$ +1or $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}{\frac{n}{n+1}-1}=1$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{-2n}{n+1}\right)=-2$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}2n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)=-2$ d'où la suite (α_n) converge et $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=-2$.

<u>Exercice N°13:</u>I) 1- Par récurrence :Pour n = 1, $1+x\leq 1+x$ est vraie. On suppose qu'on a : $1+n.x\leq(1+x)^n$ te montrons que : $1+(n+1).x\leq(1+x)^{n+1}$. Par hypothèse on a : $1+n.x\leq(1+x)^n$ donc en multipliant par $(1+x)$, on aura : $(1+x)(1+n.x)\leq(1+x)^{n+1}\Rightarrow 1+(1+n)x+nx^2\leq(1+x)^{n+1}$ or $1+(1+n)x\leq 1+(1+n)x+nx^2$ donc : $1+(n+1).x\leq(1+x)^{n+1}$

2- On pose : $\forall x \ge 0 : \varphi(x) = \ln(1+x) - x \Rightarrow \varphi'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x} \le 0$. $\forall x \ge 0 \Rightarrow \varphi(x) \le \varphi(0) = 0 \quad \Rightarrow \ln(1+x) \le x \;\; \forall x \ge 0$

3-on va prouver que : $2 \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le e$. On va utiliser a) et b) on a : $\forall x \ge 0$: on a $\begin{cases} 1+n.x \le (1+x)^n \\ \ln(1+x) \le x \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 1+n.x \le (1+x)^n \\ 1+x \le e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+n.x \le (1+x)^n \\ (1+x)^n \le e^{nx} \end{cases}$ d'où : $1+nx \le (1+x)^n \le e^{nx}$ ceci est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$. En particulier ceci est vraie pour $x = \frac{1}{n} \in \mathbb{R}_+$ dés que $n \in \mathbb{N}^*$ on aura : $2 \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le e$

4) pour n = 6, $2^6 \le \frac{6^6}{6!} \le e$ est vrai(on calcul). Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \ge 6$, on suppose que : $2^n \le \frac{n^n}{n!} \le e^n$ et montrons que : $2^{n+1} \le \frac{n^{n+1}}{(n+1)!} \le e^{n+1}$. On a : $\begin{cases} 2 \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le e \\ 2^n \le \frac{n^n}{n!} \le e^n \end{cases}$ En multiple membre à membre, on aura : $2^{n+1} \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{n^n}{n!} \le e^{n+1}$.

$$\Rightarrow 2^{n+1} \le \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{n^n}{n!} \le e^{n+1} \Rightarrow 2^{n+1} \le \frac{(n+1)^n}{n!} \le e^{n+1} \Rightarrow 2^{n+1} \le \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \le e^{n+1}$$

On a $n \ge 6$; $2^6 \le \frac{n^n}{n!} \le e^n \Rightarrow \frac{1}{e^n} \le \frac{n!}{n^n} \le \frac{1}{2^6} \Rightarrow \frac{n^n}{e^n} \le n! \le \frac{n^n}{2^6}$.

Exercice N°14:1. $u(x) = 1 \Leftrightarrow e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} = 2 \Leftrightarrow e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{e^{\frac{x}{2}}} - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - 2e^{\frac{x}{2}} - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} T = e^{\frac{x}{2}} \\ T^2 - 2T - 1 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} T = e^{\frac{x}{2}} \\ T = 1-\sqrt{2} < 0, \text{ou } T = 1+\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow e^{\frac{x}{2}} = 1+\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 2\ln\left(1+\sqrt{2}\right) \;\; ; u(0) = 0 .$$

2.a- g est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle possède des primitives sur $\mathbb{R}$. Désignons par G une primitive sur $\mathbb{R}$ de g.
$\Rightarrow F(x) = G[u(x)] - G(0)$ .Comme u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et G est dérivable sur $\mathbb{R}$ qui contient u($\mathbb{R}$). $\Rightarrow$ Gou est dérivable sur $\mathbb{R}$. Et par suite F est dérivable sur $\mathbb{R}$. $F'(x) = \left[G[u(x)] - G(0)\right]' = u'(x).G'[u(x)]$

$$\Leftrightarrow F'(x) = u'(x).\frac{u(x)}{\sqrt{1+[u(x)]^2}} = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)\sqrt{\frac{4+e^x-2+e^{-x}}{4}}$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)\sqrt{\left(\frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)\left(\frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{2}\right) = \frac{1}{8}\left(e^x + e^{-x} + 2\right) \;\; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}; F'(x) = \frac{1}{8}\left(e^x + e^{-x} + 2\right) \\ F(0) = \int_0^{u(0)} g(t)\,dt = \int_0^0 g(t)\,dt = 0 \end{cases} \Rightarrow F(x) = \int_0^x \frac{1}{8}\left(e^t + e^{-t} + 2\right)dt = \frac{1}{8}\left(e^x - e^{-x} + 2x\right)$$

3. $A = \int_0^1 g(t)dt = \int_0^{u\left[2\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]} g(t)dt = F\left[2\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right] = \frac{1}{8}\left(e^{2\ln\left(1+\sqrt{2}\right)} - e^{-2\ln\left(1+\sqrt{2}\right)} + 2\left[2\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]\right)$

$$= \frac{1}{8}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^2 - \frac{1}{\left(1+\sqrt{2}\right)^2} + 4\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right] = \frac{1}{8}\left[\frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)^2}{3+2^2} + 4\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right] \approx 1{,}148$$

4. a) $\forall n\in\mathbb{N};\ n+1>n \Leftrightarrow \frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}$. $\forall n\in\mathbb{N};\ \forall t\in\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]$, on a : $g(t)=\sqrt{1+t^2} \Rightarrow \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} g(t)dt\ge 0$

$\Leftrightarrow -\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n+1}} g(t)dt\ge 0 \Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*\ v_n=\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n+1}} g(t)dt\le 0$.

$\frac{1}{n+1}\le t\le\frac{1}{n} \Leftrightarrow g\left(\frac{1}{n+1}\right)\le g(t)\le g\left(\frac{1}{n}\right)\left[\text{car } g \text{ est} \nearrow \text{sur } \mathbb{R} \text{ puisque } g'(t)=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\ge 0\right]$ D'où :

$\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n+1}} g(t)dt\le\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n+1}} g\left(\frac{1}{n}\right)dt \Leftrightarrow \frac{-1}{n(n+1)}g\left(\frac{1}{n}\right)\le v_n$.

b) $\left.\begin{array}{l}\frac{-1}{n(n+1)}g\left(\frac{1}{n}\right)\le v_n\le 0\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{-1}{n(n+1)}g\left(\frac{1}{n}\right)\right]=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$

c)*) $S_n=v_1+v_2+v_3+\dots\dots\dots\dots+v_n=\int_1^{\frac{1}{2}}g(t)\,dt+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}}g(t)\,dt+\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{4}}g(t)\,dt+\dots\dots\dots\dots+\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n+1}}g(t)\,dt=\int_1^{\frac{1}{n+1}}g(t)\,dt$

$=\int_1^0 g(t)\,dt+\int_0^{\frac{1}{n+1}}g(t)\,dt=\int_0^{\frac{1}{n+1}}g(t)\,dt-\int_0^1 g(t)\,dt=\int_0^{\frac{1}{n+1}}g(t)\,dt-A$

*) $0\le t\le\frac{1}{n+1}\Leftrightarrow g(0)\le g(t)\le g\left(\frac{1}{n+1}\right)\Leftrightarrow g(0)\int_0^{\frac{1}{n+1}}dt\le\int_0^{\frac{1}{n+1}}g(t)dt\le g\left(\frac{1}{n+1}\right)\int_0^{\frac{1}{n+1}}dt\quad \frac{1}{n+1}\le\int_0^{\frac{1}{n+1}}g(t)dt\le\frac{1}{n+1}g\left(\frac{1}{n+1}\right)$ de plus $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}g\left(\frac{1}{n+1}\right)=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{1}{n+1}}g(t)\,dt=0$. **<u>Conclusion :</u>** $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=0$

<u>Exercice N°15:1.</u> a) $\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in[0;1]$ on a : $0\le x\le 1\Leftrightarrow 0\le x^n.x\le x^n.1\Leftrightarrow 0\le x^{n+1}e^{x^2}\le x^ne^{x^2}$

$\Rightarrow 0\le\int_0^1 x^{n+1}e^{x^2}dx\le\int_0^1 x^ne^{x^2}dx\Leftrightarrow 0\le I_{n+1}\le I_n$. $\Rightarrow$ (I_n) est décroissante sur $\mathbb{N}^*$.

b) (I_n) est décroissante sur $\mathbb{N}^*$ et elle est minorée par $0\Rightarrow(I_n)$ est converge.

2.on pose : $\left\{\begin{array}{l}u'(x)=x^n\Leftarrow u(x)=\frac{1}{x+1}x^{n+1}\\ v(x)=e^{x^2}\Rightarrow v'(x)=2x.e^{x^2}\end{array}\right.\Rightarrow I_n=\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}e^{x^2}\right]_0^1-\frac{1}{n+1}\underbrace{\int_0^1 x^{n+1}xe^{x^2}dx}_{I_{n+2}}$

$\Leftrightarrow I_n=\frac{e}{n+1}-\frac{2}{n+1}I_{n+2}\Leftrightarrow 2I_{n+2}+(n+1)I_n=e$.

3. On a (I_n) est décroissante sur $\mathbb{N}^*$ $\Rightarrow I_n\le I_{n-1}\le I_{n-2}\Rightarrow(n-1)I_n\le(n-1)I_{n-2}$

$\Leftrightarrow 2I_n+(n-1)I_n\le 2I_n+(n-1)I_{n-2}\Leftrightarrow(n+1)I_n\le e\quad\Leftrightarrow I_n\le\frac{e}{n+1}$.

On a (I_n) est décroissante sur $\mathbb{N}^*$ $\Rightarrow I_{n+2}\le I_{n+1}\le I_n\Rightarrow 2I_{n+2}\le 2I_n\Leftrightarrow 2I_{n+2}+(n+1)I_n\le 2I_n+(n+1)I_n$

$\Leftrightarrow e\le(n+3)I_n\Leftrightarrow\frac{e}{(n+3)}\le I_n\Rightarrow\quad\forall n\in\mathbb{N}^*\ ;\frac{e}{n+3}\le I_n\le\frac{e}{n+1}$

4. $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $\left.\begin{array}{l}\forall n\in\mathbb{N}^*:\frac{e}{n+3}\le I_n\le\frac{e}{n+1}\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e}{n+3}=0\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e}{n+1}=0\end{array}\right\}\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$.

5. $I_1=\int_0^1 xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 2.xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1(x^2)'e^{x^2}dx=\frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_0^1=\frac{1}{2}(e-1)$. $J=\int_0^1(x^5+2x^3)e^{x^2}dx=\int_0^1 x^5e^{x^2}dx+2\int_0^1 x^3e^{x^2}dx=I_5+2I_3$

- $2I_3+2I_1=e\Leftrightarrow I_3=\frac{e}{2}-I_1=\frac{e}{2}-\frac{1}{2}(e-1)=\frac{1}{2}$
- $2I_5+4I_3=e\Leftrightarrow I_5=\frac{e}{2}-2I_3=\frac{e}{2}-1$

$\Rightarrow$ Ainsi : $J=\frac{e}{2}-1+1\Leftrightarrow J=\frac{e}{2}$

Exercice N°16:

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{2x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(e^x-1)(e^x+1)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \underbrace{\dfrac{(e^x-1)}{x}}_{\downarrow\, 1}\underbrace{(e^x+1)}_{\downarrow\, 2} = 2 = f(0)$ donc f est continue à droite en 0.

2.a. $\forall x\,]0,+\infty[, 0 \le t \le x \Leftrightarrow 0 < 1 \le e^t \le e^x \Leftrightarrow 0 \le e^t \dfrac{(x-t)^2}{2} \le e^x \dfrac{(x-t)^2}{2}$. Toutes les fonctions sont continues sur $[0,x]$

donc $0 \le \int_0^x e^t \dfrac{(x-t)^2}{2}\, dt \le \int_0^x e^x \dfrac{(x-t)^2}{2}\, dt \Leftrightarrow 0 \le I(x) \le \dfrac{e^x}{2}\left[-\dfrac{1}{3}(x-t)^3\right]_0^x$

$\Leftrightarrow 0 \le I(x) \le \dfrac{e^x}{2}\left[0+\dfrac{1}{3}x^3\right]_0^x \Leftrightarrow 0 \le I(x) \le e^x \times \dfrac{x^3}{6} \Leftrightarrow 0 \le \dfrac{I(x)}{x^2} \le e^x \times \dfrac{x}{6} \forall x > 0$ or $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{xe^x}{6} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{I(x)}{x^2} = 0$.

b. On pose : $\begin{pmatrix} u'(t) = e^t \Leftarrow u(t) = e^t \\ v(t) = (x-t)^2 \Rightarrow v'(t) = -2(x-t) \end{pmatrix} \Rightarrow I(x) = \dfrac{1}{2}\left[e^t (x-t)^2\right]_0^x + \int_0^x (x-t)e^t\, dt$

On pose : $\begin{pmatrix} K'(t) = e^t \Leftarrow K(t) = e^t \\ J(t) = x-t \Rightarrow J'(t) = -1 \end{pmatrix} \Rightarrow I(x) = \dfrac{1}{2}\left[e^t(x-t)^2\right]_0^x + \left[(x-t)e^t\right]_0^x + \int_0^x e^t\, dt = \dfrac{1}{2}(0-x^2) + (-x) + \left[e^t\right]_0^x$

$= -\dfrac{1}{2}x^2 - x + e^x - 1 \Leftrightarrow I(x) + 1 + \dfrac{x^2}{2} + x = e^x$. $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^x-1-x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\dfrac{x^2}{2}+I(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[\dfrac{1}{2}+\dfrac{I(x)}{x^2}\right] = \dfrac{1}{2}$.

c. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\dfrac{e^{2x}-1}{x}-2}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{2x}-1-2x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{2x}-1-2x}{(2x)^2} \times 4 = \dfrac{1}{2} \times 4 = 2$ (d'après la question b).

3.a. g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a : $g'(x) = e^x(x-1) + e^x = x.e^x \ge 0$.

b. g admet un minimum égale à 0 sur $[0,+\infty[$. Donc $\forall x \in [0,+\infty[: g(x) \ge 0$

x	0		$+\infty$
g'(x)	2	+	
g(x)	0	↗	$+\infty$

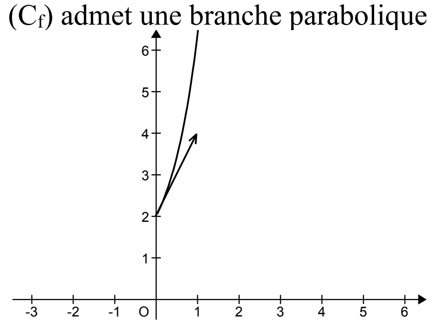
4.a. $f'(x) = \dfrac{2xe^{2x} - e^{2x} + 1}{x^2}$

$= \dfrac{e^{2x}(2x-1)+1}{x^2} = \dfrac{g(2x)}{x^2} > 0\ \forall x \in]0,+\infty[$.

x	0		$+\infty$
f'(x)	2	+	
f(x)	2	↗	$+\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^{2x}}{x} - \dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\underbrace{\dfrac{e^{2x}}{2.x}}_{\downarrow\, +\infty}.2 - \underbrace{\dfrac{1}{x}}_{\downarrow\, 0}\right) = +\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}-1}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^{2x}}{x^2} - \dfrac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\underbrace{\left(\dfrac{e^x}{x}\right)^2}_{\downarrow\, +\infty} - \underbrace{\dfrac{1}{x^2}}_{\downarrow\, 0}\right) = +\infty$ Donc (C_f) admet une branche parabolique infini de direction de celle de $(O,\vec{j})$.



5. a. f est continue sur $[0,+\infty[$ et comme $0 \in [0,+\infty[$ alors F(x) existe pour tout $x \in [0,+\infty[$

b. f est continue sur $[0,+\infty[$, donc elle admet une seule primitive

G sur $[0,+\infty[$ qui s'annule en 0. Donc $\forall x\in]1,+\infty[, F(x)=G(\ln x)$ or : $x\mapsto \ln x$ est dérivable sur $]1,+\infty[$, G est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x\in]1,+\infty[, \ln x\in]0,+\infty[\Rightarrow$ F est dérivable sur $]1,+\infty[$ comme composée de deux fonctions dérivables et on a : $F'(x)=\frac{1}{x}.G'(\ln x)=\frac{1}{x}.f(\ln x)=\frac{1}{x}\frac{e^{2\ln x}-1}{\ln x}=\frac{x^2-1}{x\ln x}$.

c. D'après la question 2/b/ on a : $\forall x\in\geq 0, e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+I(x)\geq 0\Rightarrow \forall x\geq 0, e^x\geq x$ Ainsi $\forall t\in[1,\ln x]$ avec x >e, on a : $e^{2t}\geq 2t\Rightarrow \frac{e^{2t}-1}{t}\geq\frac{2t-1}{t}\overset{\text{Fonctions continues}}{\Rightarrow}\int_1^{\ln x}\frac{e^{2t}-1}{t}\,dt\geq\int_1^{\ln x}\frac{2t-1}{t}\,dt\Rightarrow\int_1^{\ln x}f(t)\,dt\geq\int_1^{\ln x}\frac{2t-1}{t}\,dt$

or $\int_0^1 f(t)\,dt\geq 0$ car $f(x)\geq 0\Rightarrow\int_0^1 f(t)\,dt+\int_1^{\ln x}f(t)\,dt\geq\int_1^{\ln x}\frac{2t-1}{t}\,dt\Rightarrow\int_0^{\ln x}f(t)\,dt\geq\int_1^{\ln x}\frac{2t-1}{t}\,dt\Rightarrow F(x)\geq\int_1^{\ln x}\frac{2t-1}{t}\,dt$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=?$. On a $\int_1^{\ln x}\frac{2t-1}{t}\,dt=\int_1^{\ln x}2\,dt-\int_1^{\ln x}\frac{1}{t}\,dt=2(\ln(x)-1)-\ln[\ln x]$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}2(\ln(x)-1)-\ln[\ln x]$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)\left[2\left(1-\frac{1}{\ln x}\right)-\frac{\ln[\ln x]}{\ln x}\right]$ or $\lim\limits_{x\to+\infty}2\left(1-\frac{1}{\ln x}\right)=2$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln[\ln x]}{\ln x}\right]=$

$\lim\limits_{T\to+\infty}\frac{\ln T}{T}=0\left(\text{avec } T=\ln x\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}T=+\infty\right)$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)\left[2\left(1-\frac{1}{\ln x}\right)-\frac{\ln[\ln x]}{\ln x}\right]=+\infty$ doù $=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$.

Exercice N°17: 1. •$\forall t\geq 0,\ e^{-t}\leq e^t\Leftrightarrow e^{-t}+e^t\leq 2e^t\Leftrightarrow\frac{1}{e^{-t}+e^t}\geq\frac{1}{2e^t}\Leftrightarrow f(t)=\frac{1}{e^{-t}+e^t}\geq\frac{1}{e^t}=e^{-t}\,(\alpha_1)$.

•$\forall t\geq 0$, on a : $f(t)-2e^{-t}=\frac{2}{e^{-t}+e^t}-\frac{1}{e^t}=\frac{-2e^{-t}}{e^t\left(e^{-t}+e^t\right)}<0$ Donc $f(t)\leq 2e^{-t}\,(\alpha_2)$ (α_1) et $(\alpha_2)\Rightarrow\forall t\geq 0,\ e^{-t}\leq f(t)\leq 2e^{-t}$.

2. $\lim\limits_{t\to+\infty}e^{-nt}\leq\lim\limits_{t\to+\infty}[f(t)]^n\leq\lim\limits_{t\to+\infty}\left(2e^{-t}\right)^n\Rightarrow 0\leq\lim\limits_{t\to+\infty}[f(t)]^n\leq 0$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty}[f(t)]^n=0$

3.a) $K'(x)=\frac{\left(e^t+e^{-t}\right)\left(e^t+e^{-t}\right)-\left(e^t-e^{-t}\right)\left(e^t-e^{-t}\right)}{\left(e^t+e^{-t}\right)^2}=\frac{4}{\left(e^t+e^{-t}\right)^2}=\left(\frac{2}{e^t+e^{-t}}\right)^2=[f(t)]^2$. On a : $F_2(x)=\int_0^x[f(t)]^2\,dx$

$=\int_0^x K'(t)\,dt=[K(t)]_0^x=K(x)-K(0)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$, donc $u_2=\lim\limits_{x\to+\infty}F_2(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(1-e^{-x}\right)}{e^x\left(1+e^{-x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}=1$.

b) $4-\left(e^t+e^{-t}\right)^2=4-e^{2t}-2-e^{-2t}=2-e^{2t}-e^{-2t}=-\left(e^t-e^{-t}\right)^2$.

$[f(t)]^{n-1}f'(t)K(t)=\left(\frac{2}{e^t+e^{-t}}\right)^{n-1}\times\frac{-2\left(e^t-e^{-t}\right)}{\left(e^t+e^{-t}\right)^2}\times\left(\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}\right)=\frac{2^n}{\left(e^t+e^{-t}\right)^{n+1}}\times\left[4-\left(e^t+e^{-t}\right)^2\right]=\frac{2^{n+2}}{\left(e^t+e^{-t}\right)^{n+1}}-\frac{2^n}{\left(e^t+e^{-t}\right)^n}$

$=[f(t)]^{n+2}-[f(t)]^n$

c) $\forall x\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}_+^*$, on pose : $u'(t)=f^{n-1}(t)f'(t)\Leftarrow u(t)=\frac{1}{n}[f(t)]^n$ et $v(t)=K(t)\Rightarrow v'(t)=K'(t)=[f(t)]^2$ on aura : $\int_0^x[f(t)]^{n-1}f'(t)K(t)\,dt=\left[\frac{1}{n}(f(t))^nK(t)\right]_0^x-\frac{1}{n}\int_0^x[f(t)]^{n+2}\,dt=\frac{1}{n}[f(x)]^nK(x)-\frac{1}{n}\int_0^x[f(t)]^{n+2}\,dt$.

d) $\int_0^x[f(t)]^{n-1}f'(t)K(t)\,dt=\frac{1}{n}[f(x)]^nK(x)-\frac{1}{n}\int_0^x[f(t)]^{n+2}\,dt\Leftrightarrow$

$\int_0^x\left([f(t)]^{n+2}-[f(t)]^n\right)dt=\frac{1}{n}[f(x)]^nK(x)-\frac{1}{n}\int_0^x[f(t)]^{n+2}\,dt\Leftrightarrow$

$\int_0^x[f(t)]^{n+2}\,dt-\int_0^x[f(t)]^n\,dt\frac{1}{n}[f(x)]^nK(x)-\frac{1}{n}\int_0^x[f(t)]^{n+2}\,dt\Leftrightarrow F_{n+2}(x)-F_n(x)=\frac{1}{n}[f(x)]^nK(x)-\frac{1}{n}F_{n+2}(x)$

$\Leftrightarrow (n+1)F_{n+2}(x) - nF_n(x) = K(x).\left[f(x)\right]^n \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left[(n+1)F_{n+2}(x) - nF_n(x)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[K(x).\left[f(x)\right]^n\right]$

$\Rightarrow (n+1)\lim\limits_{x\to+\infty} F_{n+2}(x) - n\lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x) = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} K(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(t)\right]^n = 0$. Donc $\Rightarrow (n+1)u_{n+2} - nu_n = 0 \;\Leftrightarrow u_{n+2} = \dfrac{n}{n+2}u_2$.

e) pour n = 0 ; $u_2 = 2$ et $\dfrac{2^0 0!}{1!} = 1$ alors la propriété est vraie pour n = 0.

Supposons que : pour $n \in \mathbb{N}, u_{2n+2} = \dfrac{\left(2^n n!\right)^2}{(2n+1)!}$ et montrons que : $u_{2n+4} = \dfrac{\left[2^{n+1}(n+1)!\right]^2}{(2n+3)!}$. On a

$u_{n+2} = \dfrac{n}{n+1}u_n$ donc : $u_{2n+2} = \dfrac{2n}{2n+1}u_{2n}$. Et on a : $u_{2n+4} = u_{2(n+1)+2} = \dfrac{2(n+1)}{2(n+1)+1}u_{2(n+1)} = \dfrac{2(n+1)}{2n+3}u_{2n+2}$

$= \dfrac{2(n+1)}{2n+3}\dfrac{\left[2^n n!\right]^2}{(2n+1)!} = \dfrac{2(2n+2)(n+1)\left[2^n n!\right]^2}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!} = \dfrac{2^2(n+1)^2 2^{2n}(n!)^2}{(2n+3)!} = \dfrac{\left[2^{n+1}(n+1)!\right]^2}{(2n+3)!}$. $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+2} = \dfrac{\left[2^n.n!\right]^2}{(2n+1)!}$