Revision fonction exponentielle - integralles

Probleme1 Partie A

On donne le tableau de variation d'une fonction *f* dérivable sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0

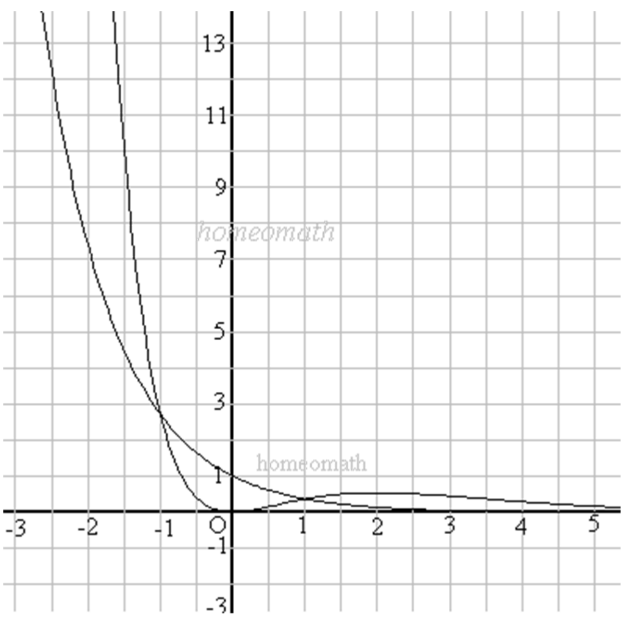
On définit la fonction F sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_2^x f(t)\,dt$$

1. Déterminer les variations de la fonction F sur $\mathbb{R}$,
2. Montrer que $0 < F(3) < 4e^{-2}$.

Partie B

La fonction *f* considérée dans la partie A est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2e^{-x}$.
On appelle g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-x}$.
On désigne par (C) et (Γ) les courbes représentant respectivement les fonctions *f* et g dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$
Les courbes sont tracées en annexe.
1. a) Montrer que les variations de la fonction *f* sont bien celles données dans la partie A.
On ne demande pas de justifier les limites.
b) Étudier les positions relatives des courbes (C) et (Γ).
2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (x^2 - l)e^{-x}$.
a) Montrer que la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = (-x^2 - 2x - l)e^{-x}$ est une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$.
b) Soit un réel α supérieur ou égal à 1.
On considère la partie du plan limitée par les courbes (C) et (Γ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.
Déterminer l'aire $A(\alpha)$, de cette partie du plan.
c) Déterminer la limite de $A(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$

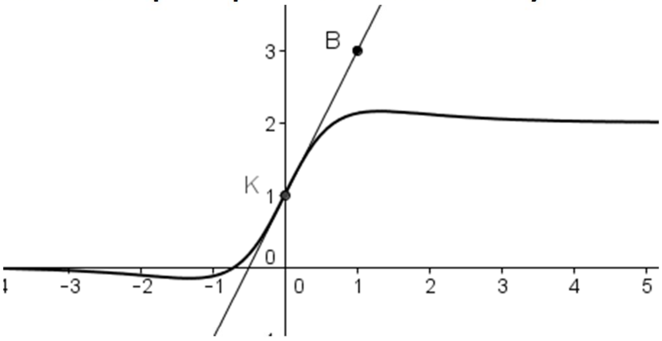


Probleme2 **Partie A - Etude graphique d'une fonction**

Soit *f* la fonction définie sur]-∞; +∞[par : $f(x)=\dfrac{2e^{2x}-e^{x}}{e^{2x}-e^{x}+1}$

On trouvera sur le graphique ci-après, le tracé de la courbe C représentative de f et le tracé de la tangente à la courbe C au point K(0 ; 1) , dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ **.**

On admet que le point K est centre de symétrie de la courbe C et que le point B(1; 3) appartient à la tangente T.



1. On se propose de démontrer certaines propriétés de la courbe C.

a. Etudier la limite de f en - ∞ et préciser l'asymptote à C correspondante

b. On admet que pour tout réel x, f(x) peut se mettre sous la forme : $f(x)=\dfrac{2-e^{-x}}{1-e^{-x}+e^{-2x}}$

En déduire la limite en + ∞ et préciser l'asymptote à C correspondante.

c. Vérifier par le calcul, que le point A(-ln2, 0) est un point de la courbe C.

2. Grâce à une lecture graphique, répondre aux questions suivantes en justifiant vos réponses.

a. Déterminer la valeur de *f'(0)*

b . Donner le signe de f(x) suivant les valeurs de x.

Partie B - Etude d'une primitive de f sur]-∞; +∞[

Soit F la fonction définie sur]-∞; +∞[par : $F(x)=\ln(e^{2x}-e^{x}+1)$

et (Γ) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. Etudier la limite de F en - ∞. Interpréter graphiquement ce résultat pour la courbe (Γ).

2. a. vérifier que pour tout réel x , F(x) peut s'écrire :

$F(x)=2x+\ln(1-e^{-x}+e^{-2x})$.

b. Calculer la limite de F en +∞, puis la limite de F(x) - (2x) en +∞

c. En déduire que la courbe (Γ) admet une asymptote.

3. a. Démontrer que f est la fonction dérivée de F sur]-∞; +∞[

b. Vérifier que F(-ln2) = ln (3/4)

c. Déduire de la partie A le tableau de variation de la fonction F.

4. Representer graphiquement (Γ)

Partie C - Calcul d'une aire

1. Calculer la valeur exacte de $\int_{-\ln 2}^{0} f(x)\,dx$.

2. En déduire la valeur de l'aire du domaine limité par (Γ) et les axes(ox) et (oy)