Fonction exponentielle

I. Définition de la fonction exponentielle

Introduction

La fonction logarithme neperienne est une fonction continue et strictement croissante definie de $\mathbb{R}^{*+}$ vers $\mathbb{R}$

Donc elle admet une fonction reciproque

1) Définition

On appelle fonction exponentielle, notée exp, la fonction reciproque de la fonction logarithme neperienne :

2) Autre Définition

On appelle fonction exponentielle, notée exp, l'unique fonction dérivable vérifiant :

$$\begin{cases} \text{Pour tout x de } \mathbb{R} \text{ , } \exp'(x) = \exp(x) \\ \exp(0) = 1 \end{cases}$$

On note e le nombre exp(1).

Remarque :
La fonction exp est continue est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3) Théorème

Pour tout réel x, exp(x) > 0.

Dem que exp(x) > 0
Pour alléger les notations on note f la fonction exponentielle.
Soit la fonction F(x) = f(x).f(-x).
F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
F'(x) = f'(x) f(-x) – f'(-x)f(x) = 0 (car f(x) = f'(x) et f'(-x) = f(-x))
Donc F'(x) = 0 pour tout réel x de $\mathbb{R}$, alors F est constante sur $\mathbb{R}$.
Donc F(x) = F(0) = 1.
Ainsi pour tout réel x, on a f(x) f(-x) = 1
Donc pour tout réel x, $f(x) \neq 0$.

Supposons qu'il existe un réel a tel que f(a) < 0, alors f(a) f(0) < 0. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires dans l'intervalle [a ; 0] ou [0 ; a] (suivant le signe de a), il existe un réel c tel que f(c) = 0. Ce qui est impossible.
Il en résulte que pour tout réel x, f(x) > 0 ou exp(x) > 0.

DEMONSTRATION DE L'UNICITE
Soit f la fonction exp.
Pour tout réel x, on a f(x) f(-x) = 1.
Supposons qu'il existe une autre fonction g définie sur $\mathbb{R}$ telle que g' = g et g(0) = 1.
Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par h(x) = g(x) f(-x).
La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et h'(x) = g'(x)f(-x) – f'(-x)g(x).
Or g'(x) = g(x) et f'(-x) = f(-x) donc h'(x) = 0 pour tout réel x.
Donc sur l'intervalle $\mathbb{R}$, h est constante et pour tout réel x, h(x) = h(0) = 1.Puisque pour tout réel x, f(x)f(-x) = 1 et g(x)f(-x) = 1 donc f(x)f(-x) = g(x)f(-x).
Or $f(-x) \neq 0$ (théorème précédent) d'où par division, pour tout réel x, f(x) = g(x).
Il en résulte que f = g. D'où l'unicité de la fonction exponentielle.

Donc, la fonction exponentielle notée exp :

- Est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

- $\text{Exp}(0) = 1$
- Pour tout réel x, $\exp(x) > 0$.
- Pour tout réel x, $\exp'(x) = \exp(x)$.

II. Propriétés algébriques

1) Théorème :

Pour tous réels a et b :

$\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$.

$\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$

$\exp(a - b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$

pour tout n de $\mathbb{Z}$, $\exp(na) = (\exp(a))^n$

Dem :

$\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$.

$\exp(x) \neq 0$

Soit $f(x) = . \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$ où y est un réel quelconque.

$f'(x) = \ldots\ldots = 0$

Donc f est constante, donc $f(x) = f(0) = \exp(y)$

D'où $\exp(x+y) = \exp(x).\exp(y)$/

$\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$

Pour tout a de $\mathbb{R}$, $\exp(a)\exp(-a) = \exp(a+(-a)) = \exp(0) = 1$.

D'où $\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$

$\exp(a - b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$

Pour tous réels a et b, $\exp(a-b)\exp(b) = \exp(a-b+b) = \exp(a)$

D'où $\exp(a - b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$

pour tout n de $\mathbb{Z}$, $\exp(na) = (\exp(a))^n$

La dem nécessite un raisonnement par récurrence.

Pour tout entier **naturel** n, on note P_n la proposition « $\exp(nx) = [\exp(x)]^n$ ».

P_0 est vraie.

Supposons P_n vraie.

Or $\exp[(n+1)x] = \exp(nx+x) = \exp(nx)\exp(x)$ ….

La proposition est vraie au rang n+1.

De plus $\exp(-nx) = \dfrac{1}{\exp(nx)} = \dfrac{1}{[\exp(x)]^n} = [\exp(x)]^{-n}$

Donc, la propriété est vraie pour tout n entier relatif.

2) Autre notation

L'image de 1 par la fonction exponentielle est le nombre réel noté e.

D'après le théorème précédent, $\exp(n) = (\exp(1))^n = e^n$

Par extension à tout nombre réel x, on note $\exp(x) = e^x$.

On lit « exponentielle de x » ou « e exposant x ».

Avec cette nouvelle notation, on a :

- $e^0 = 1$; $e^1 = e$; $e^{-1} = \frac{1}{e}$
- Pour tous réels a et b $e^{a+b} = e^a \times e^b$; $e^{-b} = \frac{1}{e^b}$; $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$;
- Pour tout entier relatif n, $(e^x)^n = e^{nx}$

III. Etude de la fonction exponentielle

1) Sens de variation

La fonction exponentielle est strictement croissante sur ℝ.

Dem :
On sait que pour tout x de ℝ, exp'(x) = exp(x).
Or exp(x) > 0.
Ainsi, la fonction exp, ayant une dérivée strictement positive sur ℝ, est strictement croissante sur ℝ.

2) Limites en +∞ et en -∞

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

Dem : comparaison de e^x et x.
$h(x) = e^x - x$
$h'(x) = e^x - 1$
h est croissante sur]0 ; +∞ [
h(0) = 1, donc h(x) >0
$e^x - x > 0$
$e^x > x$
puis comparaison des limites

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

Dem : Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $h(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.

h est dérivable et $h'(x) = e^x - x$, d'après la dem précédente, pour x>0, h'(x)>0, donc h croissante, donc h(x)>h(0) = 1>0, d'où $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$

on en déduit par comparaison de fonctions que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

Dem :
$e^x = \frac{1}{e^{-x}}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} (-x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ donc par le théorème sur les compositions de fonctions composées, on a
$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$

et ainsi $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$

Dem :
$xe^x = -\frac{-x}{e^{-x}}$

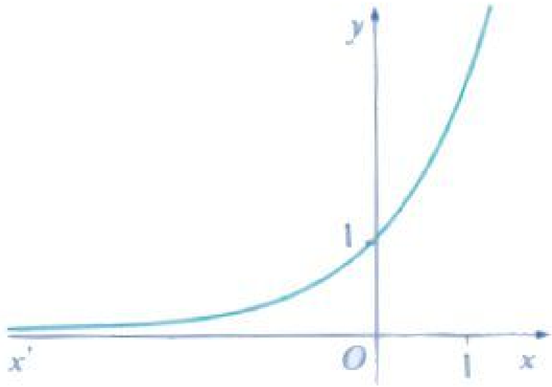
D'après le théorème sur les limites de fonctions composées,
$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{-x} = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-x}{e^{-x}} = 0$ et ainsi $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$.

3) Variation de la fonction exponentielle

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
(exp x)'		+		
e^x	0 ↗	1 ↗	e ↗	$+\infty$

4) Courbe représentative

La courbe représentative de la fonction admet pour asymptote l'axe (xx') en -∞
Une équation de la tangente au point d'abscisse 0 est y = x + 1.



$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \exp'(0) = 1$$

5) Equations et inéquations

- Quel que soit le réel m strictement positif, l'équation $e^x = m$ admet une unique solution dans ℝ.
- $e^a = b$ équivaut à a = ln(b)
- $e^a = e^b$ équivaut à a = b
- $e^a < e^b$ équivaut à a < b.

IV. Exponentielle d'une fonction

1) Dérivée de e^u

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I ouvert, alors la fonction définie par f(x) = $e^{u(x)}$ est dérivable sur I et pour tout x de I, f'(x) = $u'(x)e^{u(x)}$

2) Limites

*** $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

*** $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

*** $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

*** $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

*** $\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$

Autre limites à connaitre

*** $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

*** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$

A demontrer

3) Des fonctions e^u particulières

La modélisation de nombreux problèmes, en probabilité, en statistique ou en biologie amène à l'étude de fonctions de la forme $x \mapsto e^{-kx}$ ou $x \mapsto e^{-kx^2}$, avec k constante positive.

La Fonctions $f : x \mapsto e^{u(x)}$

- **Si f est Continue sur un intervalle I alors f est continue sur I**
- **Si** $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = +\infty$ *alors* $\lim\limits_{x\to x_0} e^{u(x)} = +\infty$
- **Si** $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = +\infty$ *alors* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{e^{u(x)}}{u(x)} = +\infty$
- **Si** $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = -\infty$ *alors* $\lim\limits_{x\to x_0} e^{u(x)} = 0^+$
- **Si** $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = -\infty$ *alors* $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)e^{u(x)} = 0^-$
- **Si** $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = 0$ *alors* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{e^{u(x)}-1}{u(x)} = 1$

Derivées

Propriété $f : x \mapsto e^{u(x)}$

Si f est dérivable sur un intervalle I alors f est dérivable sur I

Et $\forall x \in \mathrm{I};\ \left(e^{u(x)}\right)' = \left(u(x)\right)' e^{u(x)}$

Applications

Exercice1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

1) $e^{x-1} - 1 = 0$ **2)** $e^x + 2e^{-x} - 3 = 0$ **3)** $e^x + 3e^{-x} - 4 = 0$ **4)** $e^{2x} - 1 = 0$

Exercice2

Calculer les limites suivantes

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x$ **2)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^3 + x^2 - 1\right).e^x$ **3)** $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{e^{x-1}-1}{x-1}$ **4)** $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{e^x - e}{e.(x-1)}$

5) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ **6)** $\lim\limits_{x\to0^+} xe^{\frac{1}{x}}$ **7)** $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$ **8)** $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$

Exercice3

Calculer la dérivée de la fonction f dans les cas suivants

1) $f(x) = e^{(2x+1)}$ **2)** $f(x) = e^{(x^2-x+1)}$ **3)** $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$ **4)** $f(x) = \dfrac{x}{\left(e^x+1\right)^2}$

5) $f(x) = \sqrt{e^x+1}$ **6)** $f(x) = xe^{\sqrt{x}}$ **7)** $f(x) = \sqrt{x}e^x$ **8)** $f(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}$

9) $f(x) = (3-x)e^{\frac{1}{x}}$ **10)** $f(x) = e^{\sin x}$ **11)** $f(x) = e^{3x^2-2x+1}$ **12)** $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

13) $f(x) = \exp\dfrac{3+x}{1-x}$ **14)** $f(x) = \dfrac{x+2}{e^x}$ **15)** $f(x) = \ln\left(e^{2x} + xe^x + 1\right)$

Exercice4

Calculer la dérivée et les limites $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ **;** $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ **de la fonction f dans les cas suivants**

1) $f(x)=x-1+e^{x}$ **2)** $f(x)=\frac{x-2}{e^{x}}$ **3)** $f(x)=x-2+\frac{1}{e^{x}}$ **4)** $f(x)=\frac{e^{3x}-3}{e^{x}+1}$

5) $f(x)=\exp\frac{2x+1}{x+3}$ **6)** $f(x)=e^{3x}-e^{2x}+1$ **7)** $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$ **8)** $f(x)=\frac{e^{-x}}{e^{2x}+5}$

Exercice5

Soit f **la fonction définie par** $f(x)=1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^{x}+1}$

1)a) vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}$ **on a** $\frac{1}{e^{-x}+1}=1-\frac{1}{e^{x}+1}$

b) déduire que f **est impaire**

2) calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

3)a) montrer que $\forall x\in\mathbb{R}$ **;** $f'(x)=-\frac{1}{2}\left(\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right)^{2}$

b) donner le tableau des variations de f **sur** $\mathbb{R}^{+}$

c)déduire que $\forall x\in\mathbb{R}^{+}$ **;** $1-\frac{2}{e^{x}+1}\leq\frac{1}{2}x$

4) montrer que $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\left(1-\frac{1}{2}x\right)\right)=0$ **puis interpréter le résultat géométriquement**

5) représenter ℓ_{f}

Exercice6

Soit f **la fonction définie par** $f(x)=\frac{e^{x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

1) déterminer D_{f} **le domaine de définition de** f

2) calculer les limites de f **au borne du** D_{f}

3) étudier les variations de f **puis donner le tableau des variations de** f

4) représenter ℓ_{f}