Exercices (les nombres complexes)2016/2017 www.0et1.com

Exercice1

1.Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.
Soit R la rotation du plan de centre Ω, d'affixe ω et d'angle de mesure θ.
L'image par R d'un point du plan est donc définie de la manière suivante :
- R(Ω) = Ω
- pour tout point M du plan, distinct de Ω, l'image M' de M est définie par

Ω M' = Ω M et ($\overrightarrow{\Omega M}$; $\overrightarrow{\Omega M}$ ') = θ [2 π]

On rappelle que, pour des points A et B d'affixes respectives *a* et *b*,
AB = |*b* - *a*| et ($\vec{u}$, $\overrightarrow{AB}$) = arg(*b* - *a*) [2 π]
Question : Montrer que les affixes z et z' d'un point quelconque M du plan et de son image M' par la rotation R, sont liées par la relation

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$$

2. On considère les point I et B d'affixes respectives $z_I = 1 + i$ et $z_B = 2 + 2i$.
Soit R la rotation de centre B et d'angle de mesure π /3
a. Donner l'écriture complexe de R.
b. Soit A l'image de I par R. Calculer l'affixe z_A de A.
c. Montrer que O, A et B sont sur un même cercle de centre I.
En déduire que OAB est un triangle rectangle en A.
Donner une mesure de l'angle ($\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$)
En déduire une mesure de l'angle ($\vec{u}$, $\overrightarrow{OA}$)
3. Soit T la translation de vecteur $\overrightarrow{IO}$.
On pose A' = T(A).
a. Calculer l'affixe $z_{A'}$ de A'.
b. Quelle est la nature du quadrilatère OIAA'
c. Montrer que - π /12 est un argument de z_A

Exercice 2

1. Déterminer trois reels a, b et c tels que pour tout nombre complexe z on ait :
$z^3 - 8 = (z - 2)(az^2 + bz + c)$.
En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^3 - 8 = 0$.
2. Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$ (unité 2 cm), on consi dère les points A d'affixe $z_A = 2$, B d'affixe $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ et C d'affixe $z_C = -1 - i\sqrt{3}$.
a. Placer les points A, B et C
b. Déterminer la nature du triangle ABC.
Justifier la réponse.
3. On considère la rotation R de centre O et d'angle π /6 et on appelle A', B' et C' les images respectives de A, B et C par R.
a. Déterminer les formes exponentielles de z_A, z_B, et z_C puis de $z_{A'}$, $z_{B'}$, et $z_{C'}$.

b. Placer A', B' et C' sur la figure précédente.

c. Vérifier que $z_{A'}$, $z_{B'}$, et $z_{C'}$ sont solutions de l'équation $z^3 = 8i$.

Exercice 3

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

L'unité graphique est 2 cm. On note *i* le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$

1) Pour tout nombre complexe z, on pose :

$P(z) = z^3 + (2\sqrt{2} - 4) z^2 + (8 - 8\sqrt{2})z + 16\sqrt{2}$

a) Calculer $P(-2\sqrt{2}) =$

b) Déterminer une factorisation de P(z) sous la forme :

$P(z) = (z + 2\sqrt{2})(z^2 + \alpha z + \beta)$ où α et β sont deux nombres réels que l' on déterminera.

c) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : P(z) = 0.

2) On note A, B et C les points d'affixes respectives : $a = 2 + 2i$, $b = 2 - 2i$ et $c = -2\sqrt{2}$

a) Placer les points A, B et C dans le repère $(O;\vec{u};\vec{v})$.

Démontrer que A, B, C sont sur un même cercle Γ de centre O, dont on donnera le rayon.

b) Déterminer un argument du nombre complexe a puis un argument du nombre complexe b.

En déduire une mesure en radian de l'angle $(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA})$

c) Déterminer alors une mesure en radian de l'angle $(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA})$

d) Démontrer qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ est $3\pi/8$

e) En déduire l'égalité :

$$\tan\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 1 + \sqrt{2}$$

EXERCICE 4

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$.

2. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_B = 1 - i\sqrt{3}$.

a) Déterminer le module et un argument de z_A et z_B.

b) Donner la forme exponentielle de z_A .

c) Placer les points A et B dans le plan muni du repère $(O;\vec{u};\vec{v})$

3. On désigne par R la transformation du plan complexe qui à tout point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}z$$

a) Indiquer la nature de la transformation R et préciser ses éléments caractéristiques.

b) On nomme C l'image du point A par la transformation R.

Déterminer la forme exponentielle de l'affixe z_C du point C. En déduire sa forme algébrique.

c) Placer le point C.

d) Montrer que le point B est l'image du point C par la transformation R. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier votre réponse.

Exercice5

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ (unité graphique 2 cm), on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2$, $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_C = 1 - i\sqrt{3}$

Partie A

1. a) Donner la forme exponentielle de z_B puis de z_C .

b) Placer les points A, B et C .

2. Déterminer la nature du quadrilatère OBAC.

3. Déterminer et construire l'ensemble D des points M du plan tels que $|z| = |z - 2|$

Partie B

A tout point M d'affixe z tel que $z \neq z_A$, on associe le point M'd'affixe z ' défini par

$$z' = \frac{-4}{z-2}$$

1. a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z = \frac{-4}{z-2}$$

b) En déduire les points associés aux points B et C.

c) Déterminer et placer le point G ' associé au centre de gravité G du triangle OAB.

2. a) Question de cours :

Prérequis : le module d'un nombre complexe z quelconque, noté $|z|$, vérifie $|z|^2 = z\,\overline{z}$ où $\overline{z}$ est le conjugué de z.

Démontrer que :

• pour tous nombres complexes z_1 et z_2 , $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$

• pour tout nombre complexe z non nul , $|1/z| = 1/|z|$

b) Démontrer que pour tout nombre complexe z distinct de 2,

$$|z' - 2| = \frac{2|z|}{|z-2|}$$

c) On suppose dans cette question que M est un point quelconque de D, où D est l'ensemble défini à la question 3. de la partie A.

Démontrer que le point M' associe à M appartient à un cercle Γ dont on précisera le centre et le rayon.

Tracer Γ

Exercice 6

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$. on prendra pour unité graphique 5 cm. On pose $z_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n ,

$$z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$$

On note A_n le point du plan d'affixe z_n.

1. Calculer z_1 ,z_2, z_3 , z_4

Placer les points A_0, A_1 ,A_2, A_3 et A_4 sur la figure.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$

Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique puis établir que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

3. A partir de quel rang n_0 tous les points A_n appartiennent-ils au disque de centre O et de rayon 0,1 ?

4. a. Etablir que pour tout entier naturel *n*,

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = i$$

En déduire la nature du triangle OA_nA_{n+1}.

b. Pour tout entier naturel *n* , on note ln la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2...A_{n-1}A_n$.

On a ainsi : $l_n = A_0A_1 + A_1A_2 + ... + A_{n-1}A_n$

Exprimer l_n en fonction de *n*. Quelle est la limite de la suite (l_n) ?

Exercice 7

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ d'unité graphique 1 cm.

On désigne par *i* le nombre complexe de module 1 et d'argument π /2.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^2 + 4z + 16 = 0$

2. Pour tout nombre complexe z, on pose $P(z) = z^3 - 64$.

a. Calculer P(4)

b. Trouver les réels a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z,

$P(z) = (z - 4)(az^2 + bz + c)$

c. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation P(z) = 0

3. On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$z_A = -2 + 2i\sqrt{3}$, $z_B = \overline{z_A}$, $z_C = 4$.

a. Etablir que :

$$z_A = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

Ecrire z_B sous la forme $re^{i\theta}$, où r est un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel compris entre - π et π .

b. Placer les points A, B et C dans le plan muni du repère $(O;\vec{u};\vec{v})$.

c. Déterminer la nature du triangle ABC.

4. On appelle D l'image de A par la rotation de centre O et d'angle π /6 , et on appelle z_D l'affixe du point D.

a. Déterminer le module et un argument de z_D .

b. En déduire la forme algébrique de z_D .

c. Placer le point D sur le graphique précédent.