Serie nombre complexes 2019(Mr dhahbi)

EXERCICE N°1 :

On donne les nombres complexes : $z_1 = -3 - i\sqrt{3}$ et $z_2 = -3 + i\sqrt{3}$ **.**

1°/ Montrer que $z_1 = 2\sqrt{3}\, e^{i\frac{7\pi}{6}}$ et $z_2 = 2\sqrt{3}\, e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

2°/ Ecrire sous forme exponentielle $\overline{z_1}^{\,2}$ et $\dfrac{z_1^2}{\overline{z_2}}$.

EXERCICE N°2 :

Soit le nombre complexe $z = 1 + \sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 1)$

1°/ Déterminer le module et un argument du nombre complexe $z' = (1 + i)\, z$

2°/ En déduire le module et un argument de z.

EXERCICE N°3 :

On considère le nombre complexe $a = \sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

1°/ Calculer a^2 puis déterminer son module et son argument.

2°/ Donner alors la forme trigonométrique de a.

3°/ déduire de ce qui précède les valeurs exacte de $\cos(\frac{7\pi}{12})$ et $\sin(\frac{7\pi}{12})$.

EXERCICE N°4 :

Soit le complexe $z_0 = 1 + i\sqrt{3}$ et $R = (O, \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormé de P .

1°/ a) Déterminer la forme trigonométrique de z.

b) Soit I le point d'affixe z_0 . Donner une méthode géométrique permettant de construire le point I.

2°/ Démontrer que : pour tout $n \in$ IN: $z_0^n + \overline{z_0}^{\,n} = 2^{n+1}.\cos(\frac{n.\pi}{3})$

3°/ a) Soit $a = (1 - \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3})$, démontrer que $a = \sqrt{2}\, z_0 . e^{\frac{i\pi}{4}}$

b) Déterminer alors la forme trigonométrique de a.

c) En déduire $\cos(\frac{7\pi}{12})\, et \sin(\frac{7\pi}{12})$.

EXERCICE N°5 :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A et B d'affixes respectives : $a = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $b = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$**.**

1°/ a) Ecrire sous forme trigonométrique chacun des nombres complexe a et b.

b) Représenter les points A et B dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

2°/ On pose z = a + b et on désigne par M le point d' affixe z .

a) Montrer que OBMA est un carré .

b) Donner la forme trigonométrique de z .

c) Calculer alors $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.

EXERCICE N°6 :

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d’argument $\frac{\pi}{2}$.

On pose $z_1 = 1+i$; $z_2 = \sqrt{3}+i$; $z_3 = z_1^{\,3} z_2$

1°/ a) Mettre $z_1^{\,3}$ sous la forme algébrique (on pourra utiliser une identité remarquable)

b) Mettre le nombre complexe z_3 sous la forme algébrique.

2°/ a) Déterminer le module et un argument du nombre complexe z_1 , puis le module et un argument du nombre complexe $z_1^{\,3}$

b) Déterminer le module et un argument du nombre complexe z_2 .

c) Déduire des questions précédentes la forme trigonométrique du nombre complexe z_3 .

3°/ En comparant les forme trigonométrique et algébrique de z_3 ,

déterminer les valeurs exactes de $\cos\dfrac{11\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{11\pi}{12}$

EXERCICE N°7 :

Soit un plan rapporter à un repère orthonormé direct (O , $\vec{u}$, $\vec{v}$). On note A et B les points d'affixes respectives i et –2i. Soit f l'application du plan P privé de A dans P , qui à tout point M d'affixe z distincte de i associe le point M' d affixe z' définie par :

$$z' = \frac{2z-i}{iz+1}$$

1°/ Soit z un nombre complexe diffèrent de i.

a) On désigne respectivement par r et θ le module et un argument de z - i.
Interpréter géométriquement r et θ à l'aide des points A et M.

b) Montrer que : (z' + 2i) (z – i) = 1

c) En désigne par r' et θ' le module et un argument de z' + 2 i . Exprimer r' et θ' en fonction de r et θ.
Interpréter géométriquement r' et θ' à l'aide des points B et M'.

2°/ Soit (C) le cercle de centre A et de rayon 1

a) Montrer que si M appartient à (C) , alors son image M' appartient à un cercle (C') de centre B et dont on donnera le rayon.

b) Montrer que si M' appartient à (C'), alors son antécédent M par f appartient à (C).

3°/ Soit T le point d'affixe $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2})i$

a) Calculer l'affixe de $\overrightarrow{AT}$, En déduire que T appartient au cercle (C) .

b) Déterminer une mesure en radians de l'angle ($\vec{u}$, $\overrightarrow{AT}$)
Tracer le cercle (C) et placer le point T (unité graphique :

c) En utilisant les question précédentes, construire l'image T' du point T par f

EXERCICE N°8 :

1°/ On considère le nombre complexe a = - 4$\sqrt{3}$ - 4 i . Déterminer le module et un argument de a.

2°/ Résoudre dans C , l'équation z^2 = - 4 $\sqrt{3}$ - 4 i . (On donnera les solutions sous forme trigonométrique)

3°/ Soit u = (-1 - i) + $\sqrt{3}$ (1 - i)

a) Calculer u^2.

b) En déduire le module et un argument de u .

c) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$) , on considère les points A , B et C d'affixes respectives u , $\sqrt{3}$ (1 – i) ; (- 1 – i). Montrer que OBAC est un rectangle.

EXERCICE N°9:

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct (O , $\vec{u}$, $\vec{v}$) . On donne les points A et B d'affixes respectives 1 et – i. On considère la fonction f qui à tout point M distinct de B , d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' tel que z' = $\dfrac{1-z}{1-iz}$.

1°/ Déterminer l'ensemble E_1 des points M pour lequel z' soit réels.
2°/ Déterminer l'ensemble E_2 des points M pour lequel $|z'| = 1$.
3°/ a) Montrer que $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$, on a : $z' + 1 = \frac{-1+i}{z+i}$.

b) En déduire que $BM \cdot BM' = \sqrt{2}$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{BM}) + (\vec{u}, \overrightarrow{BM'}) \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi]$.

c) Montrer que si M appartient au cercle C de centre B et de rayon 1 alors le point M' appartient à un cercle C' que l'on déterminera .

d) Montrer que si M appartient à la droite D d'équation $y = x - 1$ alors le point M' appartient à une droite D' que l'on déterminera .

EXERCICE N °10 :

Dans le plan complexe £ étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Soient les points A(1) et B(-2i)

1°/ a) Déterminer et construire l'ensemble Δ_1 des points M(z) tel que $(2 + i)z + (2 - i)\bar{z} = 4$

b) Déterminer et construire l'ensemble Δ_2 des points M(z) tel que $(z + 2i) \cdot (\bar{z} - 2i) = 4$

2°/ soit l'application f qui à tout point M(z) [$z \neq 2i$] associe le point M'(z') tel que : $z' = \frac{\bar{z}+4i}{\bar{z}-2i}$

a) ♦ Vérifier que $z'-1 = \frac{6i}{\bar{z}-2i}$.

♦ En déduire l'égalité $BM \cdot AM' = 6$

♦ Déterminer une mesure de $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM'})$

EXERCICE N° 11 :

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé directe $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1°/ Pour tout nombre complexe z , $z \neq -i$, on pose $z' = \frac{z-i}{z+i}$.

a) Calculer z' dans le cas ou $z = 2 + i$. En déduire le module et un argument de z' .

b) Soient les points A ,B , M et M' d'affixe respective i , –i , z et z' .Montrer que : $OM' = \frac{MA}{MB}$.

c) En déduire que lorsque z est réel , M' appartient à un cercle que l'on précisera .

2°/ Pour tout nombre complexe z , on pose $Z = \frac{1+i}{2} z + 1 + i$.

On considère les points C , M et M_1 d'affixes respectives 2i , z et Z .

a) Vérifier que $Z - 2i = \frac{1+i}{2}(z - 2i)$.

b) En déduire que $CM_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} CM$ et que $(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CM_1}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$.

c) Montrer que : $\frac{Z-2i}{Z-z}$ est un imaginaire pur .En déduire une mesure de l'argument de $\frac{Z-2i}{Z-z}$.
Que peut – on déduire alors des droites (CM) et (MM_1)

EXERCICE N°12 :

Soit $z = \sqrt{2} + \sqrt{6} + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

1°/ a) Calculer z^2, donner le module et un argument de z^2, en déduire $|z|$ et $\arg(z)$

b) Déterminer $n \in \mathbb{N}$ / z^n soit imaginaire pur.

2/ Soit $z_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$, soit $z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$

a) Mettre sous forme trigonométrique puis sous forme exponentielle z_1 et z_2 .

b) Calculer, sous forme algébrique écrire sous forme exponentielle $z_1 z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $z_1^6\, z_2^6$

EXERCICE N°13:

1°/ Soit $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$. Déterminer le module et un argument de $z^2 - 1$.

2°/ Soit $\theta \in [0, \pi]$, déterminer le module et un argument de $z = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$.

3°/ Soit $\beta \in]\pi, 2\pi[$ et $z = \dfrac{1-\cos\beta + i\sin\beta}{1+\cos\beta - i\sin\beta}$. Déterminer le module et un arg de z .

EXERCICE N°9 :

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$,
on considère les points A , B , C et D d'affixe respectives $-2i$, $4-2i$, $4+2i$ et 1 .

1°/ Placer les points A , B , C et D sur une figure (unité : 2cm) . Préciser la nature du triangle ABC.

2°/ On désigne par f l'application de P \ {A} dans P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \dfrac{z-(4+2i)}{z+2i}$, on pose $z = x + iy$ avec x et y sont deus réels.

a) Déterminer la forme cartésienne de z' .

b) Déterminer l'ensemble E_1 des points M d'affixe z tels que z' soit réel .

c) Déterminer l'ensemble E_2 des points M d'affixe z tels que z' soit imaginaire pur .

d) Déterminer l'ensemble E_3 des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$.

3°/ a) Montrer que f est bijective de P\{A } dans P \ { D } et déterminer f^{-1} .

b) Montrer que pour tout $z \neq -2i$, on a : $(z'-1)(z+2i) = -4-4i$.

En déduire que pour tout point M d'affixe $z \neq -2i$ et pour tout point M' d'affixe $z' \neq 1$, on a :

$$f(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} DM' \cdot AM = 4\sqrt{2} \\ (\vec{i}, \overrightarrow{DM'}) + (\vec{i}, \overrightarrow{AM}) \equiv \dfrac{5\pi}{4}\ [2\pi] \end{cases}$$

c) Déterminer l'image du cercle (C) de centre A et de rayon $2\sqrt{2}$.

d) Déterminer l'image par f de la droite (D) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ vérifiant :

$(\vec{i}, \vec{u}) \equiv \dfrac{\pi}{8}\ [2\pi]$ et privée du point A .

EXERCICE N°14 :

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

On considère les points A et B d'affixe respectives $z_A = 2i$ et $z_B = \sqrt{2}(-1+i)$.

A - 1°/ a) Donner la forme trigonométrique de z_A et z_B .

b) Déduire la forme trigonométrique de $\dfrac{z_B}{z_A}$ et montrer que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

2°/ Soit C le point d'affixe $z_C = z_A + z_B$

a) Montrer que le quadrilatère OACB est un losange .Déduire la mesure principale de $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC})$

b) Déterminer la forme algébrique de z_C et son module.

c) Déduire la forme trigonométrique de z_C .

B - On désigne par f l'application de P \ {A} dans P \ {I } qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \dfrac{z+1-i}{z-2i}$,

On pose $z = x + iy$ avec x et y sont deus réels et soit D le point d'affixe $-1+i$.

1°/ Déterminer l'image et l'antécédant par f du point D .

2°/ Montrer que f est bijective .

3°/ Déterminer les points du plan invariants par f .

4°/ a) Déterminer l'ensemble E_1 des points M d'affixe z tels que z' soit imaginaire pur .

b) Vérifier que $|z'| = \dfrac{DM}{AM}$; Déduire l'ensemble E_2 des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$.

c) Déterminer l'ensemble E_3 des points M d'affixe z tels que $|z'| = 2$.

5°/ a) Calculer $(z'-1)(z-2i)$. Vérifier que: $IM' \cdot AM = \sqrt{2}$.

b) Déduire l'image par f du cercle de centre A et de rayon 1.