NOMBRES COMPLEXES www.0et1.com

Exercice 1 :

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$(1+i)^2$; $(2+i)(2-i)$; $(1+i)(1-2i)$; $\dfrac{1-3i}{3-i}$; $\dfrac{1}{1+i}+\dfrac{1}{1-i}$.

Exercice 2 :

Donner le conjugué des nombres complexes suivants :

$3+5i$; $1+i$; i; $1-2i$; $-2+3i$; $(1+i)(1-2i)$.

Exercice 3 :

Calculer le module de :

$3+4i$; $\dfrac{1+i}{1-i}$; $\dfrac{(2+3i)(1-5i)}{(4+i\sqrt{10})(12-i)}$; $-\dfrac{5}{2}i$; $(3+4i)(1-i)$.

Exercice 4 :

Donner une écriture trigonométrique de : (*Utiliser la notation exponentielle*)

$1+i$; $-1+i\sqrt{3}$; $-\sqrt{3}+i$; $\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; -1 ; i;

$-\dfrac{5}{2}i$; $2+2i$; $-1-i\sqrt{3}$; $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$; $(1+i)^2$.

Exercice 5 :

a) Soit $u=-3+3i$. Donner une écriture trigonométrique de u .

b) Trouver z tel que $u\,.\,z = 6\sqrt{2}\ e^{i\frac{17\pi}{12}}$. Donner une écriture algébrique de z .

c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{17\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\dfrac{17\pi}{12}\right)$.

Exercice 6 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

$z^2+z+1=0$; $z^2+2z+7=0$; $z^2=-7+24i$; $z^2=-3-4i$

Exercice 7 :

a) Donner sous forme trigonométrique les deux racines cubiques de l′ unité autre que 1.

b) On pose $j=e^{i\frac{2\pi}{3}}$; établir que les racines cubiques de l′ unité sont : $1,\ j,\ j^2$.

c) Montrer que $j^2=\overline{j}$. Mettre alors j et j^2 sous forme algébrique .

d) Etablir l′ égalité suivante : $1+j+j^2=0$.

e) Représenter géométriquement les racines cubiques de l′ unité.

Exercice 8 :

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5=1-i$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2=-7-24i$; en déduire les solutions de $z^4=-7-24i$.

Exercice 9 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2+2z+2=0$ b) $z\overline{z}-5(z-\overline{z})=5-10i$ c) $z^2-\overline{z}+2=0$

Exercice 10 :

Soit $u=e^{i\frac{2\pi}{5}}$. Calculer $1+u+u^2+u^3+u^4$. Calculer $u+u^4$, puis u^2+u^3 .

En déduire la valeur de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

Exercice 11 :

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Soit $w_k = e^{\frac{2i\pi k}{n}}$ pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Montrer que : $\sum_{k=0}^{n-1} w_k = 0$; $\prod_{k=0}^{n-1} w_k = (-1)^{n-1}$.

Exercice 12 :

Calculer la somme $S_1 = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$.

Exercice 13 :

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1$.

2) Donner une écriture trigonométrique de $4\sqrt{2}(-1+i)$ puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 4\sqrt{2}(-1+i)$.

Ecrire les solutions de cette équation à l'aide du nombre complexe $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

3) Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $\cos\frac{19\pi}{12}$ et $\sin\frac{19\pi}{12}$.

Exercice 14 :

Soit f une fonction de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ telle que : $f(z) = \dfrac{z-i-2}{z+i}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2) Déterminer l'ensemble des points invariants par f (nombres complexes tels que $f(z)=z$).

****Le but de l'exercice est la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z+1)^6 - (z+1)^3 + 1 = 0$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 - Z + 1 = 0$. Donner une écriture trigonométrique des solutions.

2) a) Donner une écriture trigonométrique des solutions de l'équation : $Z^3 = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

b) Donner une écriture trigonométrique des solutions de l'équation :$Z^3 = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

3) Montrer que : $-1 + e^{i\theta} = 2i\, e^{i\frac{\theta}{2}} \sin\frac{\theta}{2}$ et $-1 + e^{i\theta} = 2\, e^{i\frac{\theta+\pi}{2}} \sin\frac{\theta}{2}$.

(*utiliser les formules de trigonométrie ou les formules d'Euler*)

4) A l'aide des questions précédentes, donner une écriture trigonométrique des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $(z+1)^6 - (z+1)^3 + 1 = 0$.

Exercice 15 : Donner une écriture trigonométrique de $z = -\sqrt{3} + i$, puis de z^5, de $\dfrac{1}{z^3}$ et de $\dfrac{(1+i)^7}{\left(1-i\sqrt{3}\right)^5}$. (*Utiliser la notation exponentielle*).