Exercices complexe 2017/2018   www.0et1.com

Exercice 1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ d'unité graphique 1 cm.

On désigne par *i* le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^2 + 4z + 16 = 0$

2. Pour tout nombre complexe z, on pose $P(z) = z^3 - 64$.

a. Calculer P(4)

b. Trouver les réels a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z,
$P(z) = (z - 4)(az^2 + bz + c)$

c. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation P(z) = 0

3. On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$z_A = -2 + 2i\sqrt{3}$, $z_B = \overline{z_A}$, $z_C = 4$.

a. Etablir que :

$z_A = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Ecrire z_B sous la forme $re^{i\theta}$, où r est un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel compris entre $-\pi$ et π.

b. Placer les points A, B et C dans le plan muni du repère $(O;\vec{u};\vec{v})$.

c. Déterminer la nature du triangle ABC.

4. On appelle D l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\pi/6$, et on appelle z_D l'affixe du point D.

a. Déterminer le module et un argument de z_D .

b. En déduire la forme algébrique de z_D .

c. Placer le point D sur le graphique précédent.

Exercice 2

1. Déterminer trois reels a, b et c tels que pour tout nombre complexe z on ait :
$z^3 - 8 = (z - 2)(az^2 + bz + c)$.

En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^3 - 8 = 0$.

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$ (unité 2 cm), on consi dère les points A d'affixe $z_A = 2$, B d'affixe $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ et C d'affixe $z_C = -1 - i\sqrt{3}$.

a. Placer les points A, B et C

b. Déterminer la nature du triangle ABC.
Justifier la réponse.

3. On considère la rotation R de centre O et d'angle $\pi/6$ et on appelle A', B' et C' les images respectives de A, B et C par R.

a. Déterminer les formes exponentielles de z_A, z_B, et z_C puis de $z_{A'}$, $z_{B'}$, et $z_{C'}$.

b. Placer A', B' et C' sur la figure précédente.

c. Vérifier que $z_{A'}$, $z_{B'}$, et $z_{C'}$ sont solutions de l'équation $z^3 = 8i$.

Exercice 3

1) Pour tout nombre complexe z, on pose :

$P(z) = z^3 + (2\sqrt{2} - 4)z^2 + (8 - 8\sqrt{2})z + 16\sqrt{2}$

a) Calculer $P(-2\sqrt{2})$

b) Déterminer une factorisation de P(z) sous la forme :

$P(z) = (z + 2\sqrt{2})(z^2 + \alpha z + \beta)$ où α et β sont deux nombres réels que l' on déterminera.
c) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $P(z) = 0$.
2) On note A, B et C les points d'affixes respectives : $a = 2 + 2i$, $b = 2 - 2i$ et $c = -2\sqrt{2}$
a) Placer les points A, B et C dans le repère $(O;\vec{u};\vec{v})$.
Démontrer que A, B, C sont sur un même cercle Γ de centre O, dont on donnera le rayon.
b) Déterminer un argument du nombre complexe a puis un argument du nombre complexe b.
En déduire une mesure en radian de l'angle $(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA})$
c) Déterminer alors une mesure en radian de l'angle $(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA})$
d) Démontrer qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ est $3\pi/8$
e) En déduire l'égalité :

$$\tan\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 1 + \sqrt{2}$$

EXERCICE 4

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$.
2. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_B = 1 - i\sqrt{3}$.
a) Déterminer le module et un argument de z_A et z_B.
b) Donner la forme exponentielle de z_A.
c) Placer les points A et B dans le plan muni du repère $(O;\vec{u};\vec{v})$
3. On désigne par R la transformation du plan complexe qui à tout point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} z$$

a) Indiquer la nature de la transformation R et préciser ses éléments caractéristiques.
b) On nomme C l'image du point A par la transformation R.
Déterminer la forme exponentielle de l'affixe z_C du point C. En déduire sa forme algébrique.
c) Placer le point C.
d) Montrer que le point B est l'image du point C par la transformation R. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier votre réponse.

EXERCICE 5

1. On note P le polynôme défini pour tout nombre complexe z par : $P(z) = z^3 - 4z^2 + 8z - 8$.
a. Démontrer que pour tout nombre complexe z, $P(z) = (z - 2)(z^2 - 2z + 4)$.
b. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$
2. On note A,B, C les points d'affixes respectives : $a = 2$; $b = 1 + i\sqrt{3}$; $c = 1 - i\sqrt{3}$
a. Déterminer le module et un argument de a, b, c.
b. En déduire le centre du cercle et le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.
c. Placer les points A, B et C en laissant visibles les traits de construction.
d. Démontrer que le quadrilatère OBAC est un losange.
3. On pose $d = a + b$ et on note D le point d'affixe d.
a. Construire le point D dans le repère $(O;\vec{u};\vec{v})$
b. Démontrer que A est le milieu du segment [CD].
c. Ecrire d sous forme exponentielle.
d. Démontrer que OCD est un triangle rectangle.

Exercice 6

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$ (unité graphique : 2cm)
Soient les nombres complexes

$z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2} \quad et \quad z_2 = 1 + i\sqrt{3}$

1. a. Déterminer le module et un argument des nombres z_1 et z_2.
1. b Placer les points A et B d'affixes respectives z_1 et z_2.
2. Soit Z le nombre complexe tel que $Z = z_2/z_1$.
Ecrire Z sous forme exponentielle, en déduire une mesure en radian de l'angle θ de la rotation de centre O qui tranforme A en B .
3.a. Ecrire Z sous forme trigonométrique.
3.b. En utilisant les formes algébriques de z_1 et z_2, déterminer la forme algébrique de Z.
3.c. En déduire les valeurs exactes de

$\cos\frac{\pi}{12}$ et de $\sin\frac{\pi}{12}$

Exercice 7

1.Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$
On pose a= $\sqrt{3}$ +i et b = $\sqrt{3}$ - i.
écrire a et b sous **forme exponentielle** et placer les points A et B d'affixes respectives a et b.

2.a.Soit r la **rotation de centre** O d'angle p/3.
Calculer l'affixe a' du point A' image du point A par r. écrire a' sous forme algébrique et placer A' sur la figure précédente.

b.Soit h l'**homothétie de centre O et de rapport** $-\frac{3}{2}$.
Calculer l'affixe b' du point B' image du point B par h. Placer B' sur la figure précédente.

Exercice 8

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation en z :
$z^2 - 6z + 13 = 0$
2. a. Déterminer les réels b et c tels que pour tout complexe z :
$z^3 - 9z^2 + 31z - 39 = (z - 3)(z^2 + bz + c)$
b. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation en z :
$z^3 - 9z^2 + 31z - 39 = 0$.
3. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$
(unité : 2 cm)
Soient A, B, E et F les points d'affixes respectives :

$z_A = 3 + 2i, z_B = 3 - 2i, z_E = \frac{5}{4} + i\frac{\sqrt{15}}{4}, z_F = 3.$

a. Placer les points A, B, E et F dans le plan complexe (sur papier millimétré).
b. Calculer les distances FA, FB et FE. En déduire que les points A, B et E appartiennent à un cercle (Γ) de centre F.
c. Quelle est la nature du triangle ABE ?