Séries3 complexes
(Nombres Complexes)

<u>Exercice 1 :</u>

On considère le plan complexe P rapporté à un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}, \vec{v}$).

Dans tout l'exercice P \ {O} désigne le plan P privé du point origine O.

1) On prend comme pré-requis les résultats suivants :
   - Si z et z' sont deux nombres complexes non nuls, alors : arg (zz') = arg (z) + arg (z') à 2kπ près, avec k entier relatif.
   - Pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul d'affixe z on a : arg (z) = ($\vec{u}, \vec{w}$) à 2kπ près, avec k entier relatif.

   a) Soit z et z' des nombres complexes non nuls, démontrer que : arg $\left(\frac{z}{z'}\right)$ = arg(z) – arg(z') à 2kπ près, avec k entier relatif.

   b) Démontrer que si A, B, C sont trois points du plan, deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b, c, on a : $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC}\right)$ à 2kπ près, avec k entier relatif.

2) On considère l'application f de P\ {O} qui, au point M du plan d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par : z' = $\frac{1}{z}$. On appelle U et V les points du plan d'affixes respectives 1 et i.

   a) Démontrer que pour z ≠ 0, on a arg (z') = arg (z) à 2kπ près, avec k entier relatif.
   En déduire que, pour tout point M de P \ {O} les points M et M' = f(M) appartiennent à une même demi-droite d'origine O.

   b) Déterminer l'ensemble des points M de P \ {O} tels que f (M) = M.

   c) M est un point du plan P distinct de O, U et V ; on admet que M' est aussi distinct de O, U, et V.
   Etablir l'égalité $\frac{z'-1}{z'-i} = \frac{1}{i}\left(\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+i}\right) = -i\overline{\left(\frac{z-1}{z-i}\right)}$

   En déduire une relation entre $\arg\left(\frac{z'-1}{z'-i}\right)$ et $\arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right)$

3) a) Soit z un nombre complexe tel que z ≠ i et soit M le point d'affixe z. Démontrer que M est sur la droite (UV) privée de U et de V si et seulement si $\left(\frac{z-1}{z-i}\right)$ est un nombre réel non nul.

   b) Déterminer l'image par f de la droite (UV) privée de U et de V.

<u>Exercice 2 :</u>

<u>Partie A :</u>

Prérequis : On rappelle les deux résultats suivants :

(i) Si z est un nombre complexe non nul, on a l'équivalence suivantes :

$$\begin{cases} |z| = r \\ \arg z = \theta \text{ à } 2\pi \text{ près} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ r > 0 \end{cases}$$

(ii) Pour tous nombres réels a et b :

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \\ \sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a \end{cases}$$

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls.

Démontrer les relations : $|z_1z_2| = |z_1|\,|z_2|$ et arg (z_1z_2) = arg (z_1) + arg (z_2) à 2π près.

<u>Partie B :</u>

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre-exemple. Une réponse sans démonstration ne rapporte pas de point.

On rappelle que si z est un nombre complexe, $\bar{z}$ désigne le conjugué de z et |z| désigne le module de z.

1) Si z = $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$, alors z^4 est un nombre réel.

2) Si z + $\bar{z}$ = 0, alors z = 0.

3) Si z + $\frac{1}{z}$ = 0, alors z = i ou z = – i.

4) Si |z| = 1 et si |z + z'| = 1, alors z' = 0.

Exercice 3 :

Le plan est rapporté au repère orthonormal (O ; $\vec{u},\vec{v}$). Unité graphique : 3 cm.

A tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' par l'application f qui admet pour écriture complexe : $z'=\frac{(3+4i)z+5\bar{z}}{6}$

1) On considère les points A, B, C d'affixes respectives z_A = 1 + 2i, z_B = 1 et z_C = 3i.
Déterminer les affixes des points A', B', C' images respectives de A, B, C par f.
Placer les points A, B, C, A', B', C'.

2) On pose z = x + iy (avec x et y réels)
Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de x et y.

3) Montrer que l'ensemble des points M invariants par f est la droite D d'équation y = $\frac{1}{2}x$
Tracer D. Quelle remarque peut on faire ?

4) Soit M un point quelconque du plan et M' son image par f.
Montrer que M' appartient à la droite D.

5) a) Montrer, pour tout nombre complexe z : $\frac{z'-z}{z_A}=\frac{z+\bar{z}}{6}+i\frac{z-\bar{z}}{3}$
En déduire que le nombre $\frac{z'-z}{z_A}$ est réel.
b) En déduire que, si M' ≠ M, les droites (OA) et (MM') sont parallèles.

6) Un point quelconque N étant donné, comment construire son image N' ?
(On étudiera deux cas suivant que N appartient ou non à D.)
Effectuer la construction sur la figure.

Exercice 4 : Q.C.M Choisir la (ou les) bonne(s) réponse(s)

Dans tout l'exercice, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u},\vec{v}$).

1) Le point M est situé sur le cercle de centre A(2, 5) et de rayon $\sqrt{3}$, son affixe z vérifie :
   a) $|z – 2 + 5i|^2 = 3$
   b) $|z + 2 – 5i|^2 = 3$
   c) |z – 2 + 5i| = 3

2) On considère trois points A, B et C d'affixes respectives a, b et c, deux à deux distinct et tels que le triangle ABC n'est pas équilatéral. Le point M est un point dont l'affixes z est telle que les nombres complexes $\frac{z-b}{c-a}$ et $\frac{z-c}{b-a}$ sont imaginaires purs.
   a) M est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
   b) M appartient aux cercles de diamètres respectifs [AC] et [AB]
   c) M est l'orthocentre du triangle Abc.

3) Soit A et B les points d'affixes respectives 1 + i et 5 + 4i, et C un point du cercle de diamètre [AB]. On appelle G l'isobarycentre des points A, B et C et on note z_G son affixe.
   a) $|z_G – 3 – 2{,}5\, i| = \frac{5}{6}$
   b) $z_G – (1 + i) = \frac{1}{3}(4 + 3i)$
   c) $z_G – (3 + 2{,}5\, i) = \frac{1}{3}(4 + 3i)$

Exercice 5 : Q.C.M Choisir la (ou les) bonne(s) réponse(s)

1) Dans le plan complexe, on donne les points A, B et C d'affixes respectives -2 + 3i, - 3 – i et 2,08 + 1,98i. Le triangle ABC est :
   a) isocèle et non rectangle
   b) rectangle et non isocèle
   c) rectangle et isocèle
   d) ni rectangle ni isocèle
2) A tout nombre complexe $z \neq -2$, on associe le nombre complexe z' définie par ; $z' = \frac{z-4i}{z+2}$
   L'ensemble des points M d'affixes z tels que z' est un réel est :
   a) un cercle
   b) une droite
   c) une droite privé d'un point
   d) un cercle privé d'un point.
3) Les notations sont les même qu'à la question 2. l'ensemble des points M d'affixe z' est un réel est :
   a) un cercle
   b) une droite
   c) une droite privée d'un point
   d) un cercle privé d'un point
4) Dans le plan complexe , on donne le point D d'affixe i. l'écriture complexe de la rotation de centre D et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ est :
   a) $z' = (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$
   b) $z' = (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$
   c) $z' = (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})z - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$
   d) $z' = (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

Exercice 6 :

On se place dans le plan complexe P rapporté au repère orthonormé direct $(o ; \vec{e_1} ; \vec{e_2})$ $f(z) = \frac{z-3+i}{z+5-3i}$

1) Préciser l'ensemble de définition D_f de f.
2) Calculer les parties réelle et imaginaire de f(z) en fonction de celles de z.
3) Déduire du 2) les ensembles suivants et les construires : $L_1 = \{M(z) \in P$ tels que $f(z) \in IR\}$;
   $L_2 = \{M(z) \in P$ tels que $f(z) \in i\,IR\}$
4) Déterminer et construire l'ensemble $L_3 = \{M(z) \in P$ tels que $|f(z)| = 1\}$.
5) Résoudre dans C l'équation $f(z) = -\overline{f(\overline{z})}$

Exercice 7 :

Soit le complexe $a = \frac{-2}{1+i\sqrt{3}}$

1) a) Ecrire a sous forme algébrique.
   b) Montrer que $a^2 = \overline{a}$ et que $1 + a + a^2 = 0$.
   c) Ecrire a sous forme trigonométrique.
2) a) vérifier que $z2 - 2\sqrt{2}\,z = (z - \sqrt{2})^2 - 2$
   b) Résoudre alors dans C, l'équation $z^2 - 2\sqrt{2}\,z + 4 = 0$.
3) Soit b = 1 – i
   a) Ecrire b sous forme trigonométrique.

b) En déduire la forme trigonométrique du nombre complexe c = $\frac{\pi}{b^3}$

c) Déterminer alors les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

4) Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé (O
Soient les points A, B et M d'affixes respectives a, b et z, (où z ∈ C)
a) Placer les points A et B dans (O, $\vec{u},\vec{v}$).
b) Déterminer et construire chacun des ensembles suivants :
E = {M ∈ P, |iz – i – 1| = [a – b|}, F = { M ∈ P, $|\bar{z}-i-1| = \left|z+\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right|$} et

G = {M ∈ P, $\frac{z-1}{iz+1}$ soit un imaginaire pur}.

Exercice 8 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{I},\vec{J}\right)$. On considère les points A, B et I d'affixes respectives $Z_A = \frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{3}{2}$; $Z_B = -\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et Z_I = i.

1) a) Montrer que le point A appartient au cercle de centre I et de rayon R = 1.
b) En déduire une construction de A et B.
2) Soit C d'affixe $Z_C = Z_A + Z_B$ montrer que OACB est un carré
3) a) Ecrire Z_A et Z_B sous forme trigonométrique.
b) Montrer que $\left(\widehat{\vec{I},\overrightarrow{OC}}\right) \equiv \frac{7\pi}{12}[2\pi]$ en déduire Z_C sous forme trigonométrique.
c) En déduire $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$
4) Soit Z ∈ C $Z \neq i$ et Z' = $\frac{Z}{iZ+1}$ on considère les points M(Z) et M'(Z')
a) Ecrire Z' sous forme algébrique pour Z = 1 + 2i
b) Soit Z = $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ écrire Z' sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique
c) Déterminer l'ensemble des points M (Z) tel que |Z'| = 1.Le plan complexe P