LES NOMBRES COMPLEXES

WWW.0ET1.COM

Les nombres complexes prennent naissance au XVIème siècle lorsqu'un italien *Gerolamo Cardano* (1501 ; 1576), ci-contre, au nom francisé de *Jérôme Cardan*, introduit $\sqrt{-15}$ pour résoudre des équations du troisième degré.

En 1572, un autre italien, *Rafaele Bombelli* (1526 ; 1573) publie "*Algebra, parte maggiore dell'aritmetica, divisa in tre libri*" dans lequel il présente des nombres de la forme $a+b\sqrt{-1}$ et poursuit les travaux de *Cardan* sur la recherche de solutions non réelles pour des équations du troisième degré.

A cette époque, on sait manipuler les racines carrées d'entiers négatifs mais on ne les considère pas comme des nombres. Lorsqu'une solution d'équation possède une telle racine, elle est dite imaginaire.

La notation *i* apparaît en 1777 siècle avec *Leonhard Euler* (1707 ; 1783) qui développe la théorie des nombres complexes sans encore les considérer comme de « vrais » nombres. Il les qualifie de nombres impossibles ou de nombres imaginaires.

Au XIXe siècle, *Gauss* puis *Hamilton* posent les structures de l'ensemble des nombres complexes. Les nombres sans partie imaginaire sont un cas particulier de ces nouveaux nombres. On les qualifie de « réel » car proche de la vie. Les complexes sont encore considérés comme une création de l'esprit.

https://youtu.be/2_Wn9TJZTQU

Introduction

Considérons les équations suivantes :

(1) $x+1=0$ (2) $3x+5=0$ (3) $x^2-2=0$ (4) $x^2+1=0$

- Dans $\mathbb{N}$ (ensemble des naturels), l'équation (1) n'admet pas de solution. 0n résout ce problème en créant les nombres négatifs. Dans $\mathbb{Z}$ (ensemble des entiers), cette équation a comme solution -1.
- Dans $\mathbb{Z}$, l'équation (2) n'a pas de solution. On introduit les fractions. Dans $\mathbb{Q}$ (ensemble des rationnels), cette équation a comme solution $-\frac{5}{3}$.
- Dans $\mathbb{Q}$, l'équation (3) n'a pas de solution. C'est pourquoi on introduit les nombres irrationnels. Dans $\mathbb{R}$ (ensemble des réels), l'équation (3) admet deux solutions : $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.

- Dans $\mathbb{R}$, l'équation (4) n'a pas de solution. C'est pourquoi on crée de nouveaux nombres : les nombres complexes. Il forment l'ensemble $\mathbb{C}$ et permettent de déterminer les solutions de cette équation.

Remarque

Historiquement, ce n'est pas en cherchant les solutions d'une équation du second degré, mais celles d'une équation du 3e degré que les mathématiciens italiens du XVIe siècle furent confrontés à la racine carrée d'un nombre négatif. Cardano (1501-1576), Tartaglia (1499-1557) et Ferrari (1522-1565) désignèrent par le symbole $\sqrt{-1}$, la racine carrée apparemment inexistante de -1 et c'est Bombelli (1526-1572) qui établit les règles de calcul des nombres complexes. Dès lors, une équation de degré *n* possède *n* solutions.

Définitions

- Nous définissons le nombre ***i*** par la formule $\boxed{i^2 = -1}$

i et - *i* sont les racines carrées de - 1.

- Tout nombre complexe z s'ecrit sous la forme , $z = a + bi \ \ tel\,que\ a, b \in \mathbb{R}$.
- Si $z = a + bi \ \ tel\,que\ a, b \in \mathbb{R}$ .le nombre a est appeler la partie réelle de z on note a=Re(z)

  Et le nombre b est appeler la partie imaginaire de z on note b=Im(z)

$$\forall z \in \mathbb{C}; z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)$$

Si $b = 0$, $z = a$ est un réel, ce qui entraîne que ***R*** est inclus dans ***C*** .

Si $a = 0$ et $b \neq 0$, $z = bi$ est un imaginaire pur.

- le **conjugué du nombre complexe** $z = a + bi$ est $\bar{z} = a - bi$
- le **module** du nombre complexe $z = a + bi \ \ tel\,que\ a, b \in \mathbb{R}$

  est le nombre reel positif $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Opérations dans l'ensemble des nombres complexes

Remarque

Dans la suite z, z', z''... représentent respectivement les nombres complexes $a + bi$, $a' + b'i$, $a'' + b''i$

Égalité $a + bi = a' + b'i$ si et seulement si $\begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$

Des nombres complexes sont égaux si et seulement leurs parties réelles sont égales ainsi que leurs parties imaginaires.

Addition

$$(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i$$

Exemples

$* (5 + 2i) + (3 - 4i) = 5 + 3 + 2i - 4i = 8 - 2i$

$* \ (-2 + i) - (4 - 4i) = -2 + i - 4 + 4i = -6 + 5i$

Multiplication par un réel

$$k(a + bi) = ka + kbi$$

Multiplication de deux nombres complexes

$$(a+bi).(a'+b'i)=(aa'-bb')+(ab'+a'b)i$$

Exemples

- $(5+2i)(3-4i)=15-20i+6i+8=23-14i$

Propriéte des operations

1-l'addition

a. Associativité

$\forall\ z,z',z''\in\mathbb{C}\ :\ (z+z')+z''=z+(z'+z'')$

b. Commutativité

$\forall\ z,z'\in\mathbb{C}\ :\ z+z'=z'+z$

c. L'element neutre pour la multiplication dans $\mathbb{C}$ est 0

$\forall z\in\mathbb{C}\ ,\ z+0=0+z=z$

d. le symétrique d'un élément *z* de $\mathbb{C}^*$

le symétrique de z est -z

2-multiplication

e. Associativité

$\forall\ z,z',z''\in\mathbb{C}\ :\ (zz')z''=z(z'z'')$

f. Commutativité

$\forall\ z,z'\in\mathbb{C}\ :\ zz'=z'z$

g. L'element neutre

L'element neutre pour la multiplication dans $\mathbb{C}$ est 1

$\forall z\in\mathbb{C}\ ,\ z\times 1=1\times z=z$

h. le symétrique d'un élément *z* de $\mathbb{C}^*$

dans $\mathbb{C}^*$ le symetrique de z est 1/z

soit z un nombre complexe non nul z=a+ib

pour chercher le nombre complexe $z^{-1}=\alpha+\beta i$ tel que $z^{-1}z=1$

o n a $(\alpha+\beta i)(a+bi)=1$

donc $\begin{cases} a\alpha - b\beta = 1 \\ b\alpha + a\beta = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} \alpha = \dfrac{a}{a^2+b^2} \\ \beta = \dfrac{-b}{a^2+b^2} \end{cases}$

Donc pour $a+bi \neq 0$,.

L'inverse de *z* est $z^{-1} = \dfrac{1}{z} = \dfrac{a-bi}{a^2+b^2}$

- $\dfrac{1}{1+2i} = \dfrac{1-2i}{(1+2i)(1-2i)} = \dfrac{1-2i}{1-4i^2} = \dfrac{1-2i}{1+4} = \dfrac{1-2i}{5} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5}i$
- $\dfrac{3-i}{1-2i} = \dfrac{(3-i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \dfrac{3+6i-i-2i^2}{1-4i^2} = \dfrac{3+6i-i+2}{1+4} = \dfrac{5+5i}{5} = 1+i$

Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition

$$\forall\ z, z', z'' \in \mathbb{C}\ :\ z\left(z'+z''\right) = zz' + zz''$$

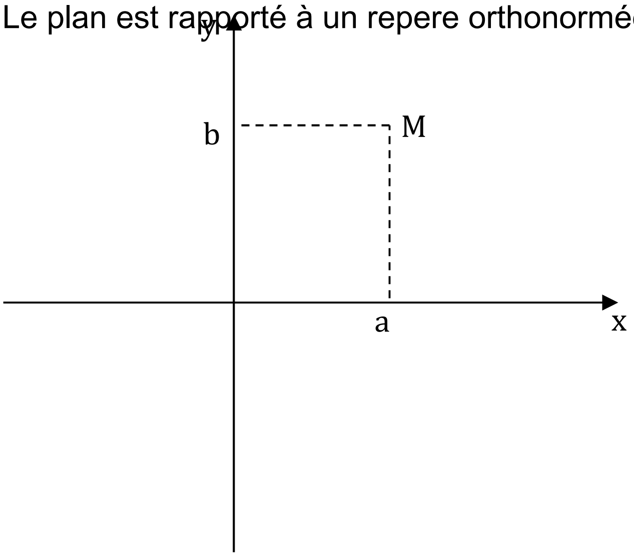
De ce qui précède, il résulte clairement que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Et que l'addition et la multiplication définies dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$ donnent le même résultat et les memes propriétés.

Donc on peut dire que $\mathbb{C}$ **prolonge donc** $\mathbb{R}$

Représentation géométrique des complexes

Le plan est rapporté à un repere orthonormée $R(O,\vec{u},\vec{v})$



A tout nombre complexe $z = a+bi$ faisons correspondre le point *M* de coordonnées (a,b).

M est le point image du complexe *z.*

On dit que *z* est **l'affixe** du point *M.*

Et on ecrit aff(M)=z

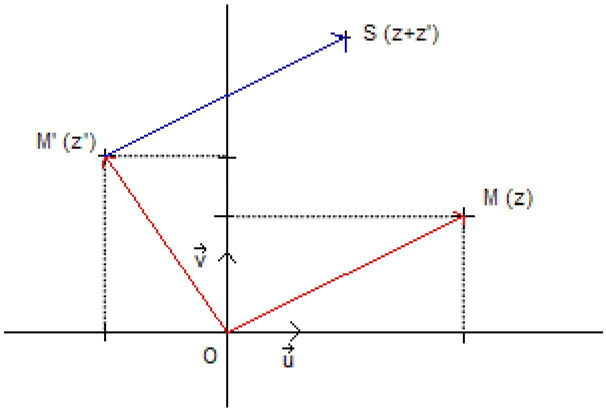
Remarques : si $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$

Alors $aff(\vec{u}) = aff(\overrightarrow{OM}) = aff(M) = z_M$

$$aff(\overrightarrow{AB}) = aff(B) = aff(A) = z_B - z_A$$

Dans le plan complexe, on considère M (z) et M' (z').

On définit le point S par $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$. Alors l'affixe de S est z + z'.



L'ensemble des points images des nombres complexes est le **plan complexe**

Remarques

1. L'axe Ox est appelé **axe réel** (c'est l'ensemble des points images des nombres réels).
2. L'axe Oy est appelé **axe des imaginaires** (c'est l'ensemble des points images des nombres imaginaires purs).
3. Les points images de nombres complexes conjugués sont symétriques par rapport à l'axe (Ox).

Propriétés

Si P_1 et P_2 sont les points images de z_1 et z_2, alors le point image P de $z_1 + z_2$ est tel que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}$ et le point image R de rz_1 est tel que $\overrightarrow{OR} = r\ \overrightarrow{OP_1}$.

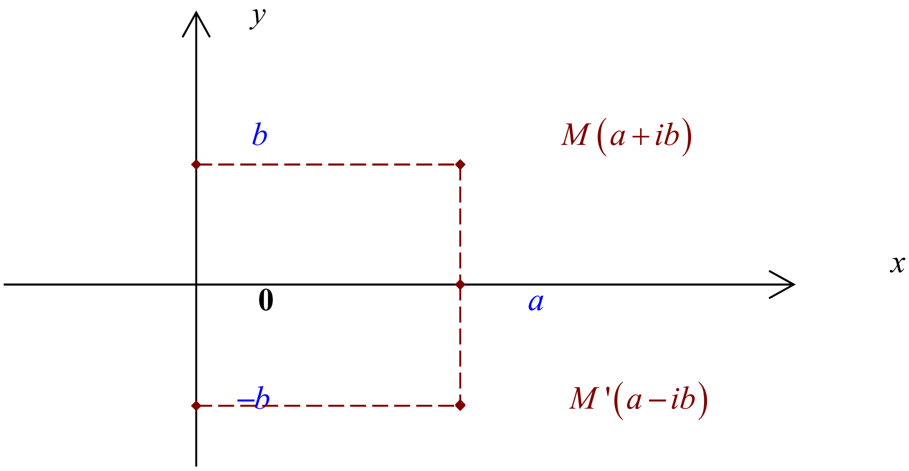
1- Le conjugué d'un nombre complexe

- **Definition** le **conjugué du nombre complexe** $z = a + bi$ est $\bar{z} = a - bi$

$$\overline{a + ib} = a - ib \quad / \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

remarque

1. $z + \bar{z} = (\ a + bi\ ) + (\ a - bi\ ) = 2a \quad \in \mathbb{R}$
2. $z.\bar{z} = (a + bi\ ).(a - bi)\ = a^2 + b^2 \quad \in \mathbb{R}$
3. $\forall z \in \mathbb{C}\ ;\ \bar{\bar{z}}\ = z$
4. les points $M(z)$ et $M'(\bar{z})$ **sont symetrique par rapport à l'axe des abscisses**



Proprietes

1. $\forall z \in \mathbb{C}$

$$z + \overline{z} = 2\,\Re e(z)$$

$$z - \overline{z} = 2\,i\,\operatorname{Im}(z)$$

2. $\forall z \in \mathbb{C} \;\; / \;\; (a,b) \in \mathbb{R}^2$ **alors** $\quad z = \overline{z} \;\Leftrightarrow\; z \in \mathbb{R}$

$z + \overline{z} = 0 \;\Leftrightarrow\;$ **Z est imaginaire pur**

3. **soit z_1 Deux complexe et z_2**

on a $\quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

et $\quad \overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$

et $\quad \overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \;\; / \;\; z_2 \neq 0$

4. Pour tout complexe z et tout reel α

On a $\overline{\alpha\, z} = \alpha\, \overline{z}$

5- pour tout complexe z et entier naturel n

$$\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$$

6- $\forall z_1 , z_2 , \dots z_n \in \mathbb{C}$

$$\overline{z_1 \cdot z_2 \cdot \dots\dots z_n} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \cdot \dots\dots \overline{z_n}$$

$$\overline{\underset{k=1}{\overset{n}{\pi}}\; z_k} = \underset{k=1}{\overset{n}{\pi}}\; \overline{z_k}$$

Application

1-resoudre dans ℂ l'équation $(E_1) \; : \; \dfrac{z + 2\,i}{i\,\overline{z} - 1} = 3\,i$

on a $\quad D = \{ z \in \mathbb{C} \;/\; i\,\overline{z} - 1 \neq 0 \}$

$$i\,\overline{z} - 1 \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \overline{z} \neq \frac{1}{i}$$

$$\Leftrightarrow\; \overline{z} \neq -i$$

$$\Leftrightarrow\; z \neq i$$

donc $\quad D = \{ z \in \mathbb{C} \;/\; z \neq i \}$

donc $\quad \forall z \in D$

$$(E_1) \;\Leftrightarrow\; z + 2\,i = (i\,\overline{z} - 1)\,3\,i$$

$$\Leftrightarrow\; z + 2\,i = -3\,\overline{z} - 3\,i$$

$$\Leftrightarrow\; z + 3\,\overline{z} - 5\,i = 0$$

on pose $z = x + iy$

donc $(E_1) \Leftrightarrow (x + iy) + 3(x - iy) + 5i = 0$

$\Leftrightarrow (x + 3x) + i(y - 3y + 5) = 0$

$\Leftrightarrow 4x + i(5 - 2y) = 0$

$\Leftrightarrow 4x = 5 - 2y = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ **et** $y = \dfrac{5}{2}$

donc $z = \dfrac{5}{2} i$

donc $S = \left\{\dfrac{5}{2} i\right\}$

2-resoudre dans $\mathbb{C}$ **l'équation** $(E_2) : z^2 + 4\overline{z} - 5 = 0$

on pose $z = x + iy$

donc $(E_2) \Leftrightarrow (x + iy)^2 + 4(x - iy) - 5 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 2ixy - y^2 + 4x - 4iy - 5 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - y^2 + 4x - 5) + i(2xy - 4y) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 4x - 5 = 0 \\ 2y(x - 2) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 4x - 5 = 0 \\ y = 0 \quad ou \quad x = 2 \end{cases}$

si $y = 0$

alors $x^2 + 4x - 5 = 0$

$\Delta = 36 = 6^2 \Rightarrow x_1 = -5$ **et** $x_2 = 1$

donc $S_1 = \{-5 ; 1\}$

si $x = 2$

alors $4 - y^2 + 4 \times 2 - 5 = 0$

$\Leftrightarrow 4 - y^2 + 8 - 5 = 0$

$\Leftrightarrow -y^2 = -7$

$\Leftrightarrow y^2 = 7$

$y = \sqrt{7}$ **ou** $y = -\sqrt{7}$

donc $S_2 = \left\{2 - i\sqrt{7} \; ; \; 2 + i\sqrt{7}\right\}$

donc $S = \left\{-5 \; ; \; 1 \; ; \; 2 - i\sqrt{7} \; ; \; 2 + i\sqrt{7}\right\}$

2. Module d'un nombre complexe :

Définition

Soit z un nombre complexe quelconque de forme algébrique $z = a + ib$. On appelle module de z le nombre réel noté $|z|$ défini par : $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Propriétés

Pour tout nombre complexe z,

- $|z|^2 = z \times \bar{z}$
- $|z|$ est toujours positif et $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
- $|z| = |-z| = |\bar{z}|$
- Si z est un nombre réel, alors le module de z coïncide avec la valeur absolue de z.
- Si z est un imaginaire pur, alors le module de z est égal à la valeur absolue de sa partie imaginaire.
- Si M est le point d'affixe z, alors $OM = |z|$.
- Si z est un nombre complexe non nul de forme trigonométrique $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, alors $|z| = r$.

Démonstration :

- Si $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, alors $a = r\cos\theta$ et $b = r\sin\theta$.

Donc $|z|^2 = (r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2$. Le module de z et r étant tous deux positifs, on en déduit que $|z| = r$.

- Si z est réel alors $b = 0$ et $z = a$. Donc $|z| = \sqrt{a^2} = |a|$.

Exemples :

$|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25}$

$|-5| = 5$

$|-2i| = 2$.

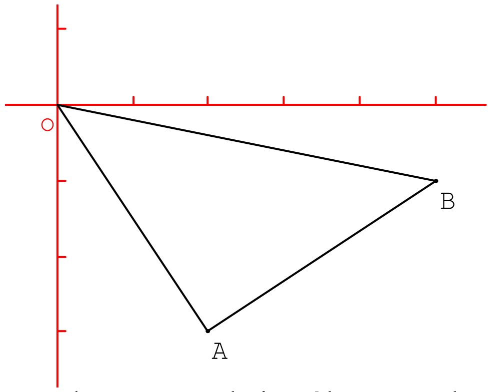
Propriétés

- Soit $\vec{u}$ un vecteur d'affixe z. Alors $\|\vec{u}\| = |z|$
- Soient A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B. Alors : $AB = |z_B - z_A|$.

Démonstration :

- Soit M le point du plan complexe tel que : $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$. Alors z est à la fois l'affixe de M et celle de $\vec{v}$.
  Donc : $\|\vec{u}\| = OM = |z|$.
- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$. Par conséquent : $AB = \|\vec{u}\| = |z_B - z_A|$.

Exemple :
Soient A et B les points d'affixes $2-3i$ et $5-i$. Etudions la nature du triangle OAB :



$OA=|z_A|=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$

$OB=|z_B|=\sqrt{5^2+(-1)^2}=\sqrt{26}$

$AB=|z_B-z_A|=|(5-i)-(2-3i)|$

$\quad =|3+2i|=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$.

On remarque ainsi que :
OA=AB et OB²=OA²+AB² . Le triangle OAB est donc rectangle isocèle rectangle en A

Propriétés algébriques

Pour tous nombres complexes *z* et *z'* , on a :

1. $|z\times z'|=|z|\times|z'|$
2. Pour tout entier naturel *n*, $|z^n|=|z|^n$
3. Si $z\neq 0$, alors $\left|\dfrac{1}{z}\right|=\dfrac{1}{|z|}$
4. Si $z'\neq 0$, alors $\left|\dfrac{z}{z'}\right|=\dfrac{|z|}{|z'|}$
5. $|z+z'|\leq|z|+|z'|$

Démonstration :

1. Pour démontrer cette 1ère propriété, utilisons que $|z|^2=z\times\overline{z}$:
   $|z\times z'|^2=(z\times z')\times(\overline{z\times z'})=z\times\overline{z}\times z'\times\overline{z'}=|z|^2\times|z'|^2=\left(|z|\times|z'|\right)^2$. $|z\times z'|$ et $|z|\times|z'|$ ont donc le même carré ; or ils sont tous deux positifs donc ils sont égaux .
2. Soit (u_n) la suite de terme général $u_n=|z^n|$. Alors pour tout entier naturel *n*,
   $u_{n+1}=|z^{n+1}|=|z\times z^n|=|z|\times|z^n|=|z|\times u_n$. Donc la suite (u_n) est géométrique de raison $q=|z|$ et de 1er terme $u_0=|z^0|=|1|=1$. Donc pour tout entier naturel *n*, $u_n=u_0q^n=|z|^n$.
   On a donc à la fois : $u_n=|z^n|=|z|^n$.
3. Soit *z* un nombre complexe non nul . Alors $\left|z\times\dfrac{1}{z}\right|=|z|\times\left|\dfrac{1}{z}\right|$ d'une part et $\left|z\times\dfrac{1}{z}\right|=|1|=1$ d'autre part .
   Donc $|z|\times\left|\dfrac{1}{z}\right|=1$ et comme $|z|\neq 0$, on peut conclure que : $\left|\dfrac{1}{z}\right|=\dfrac{1}{|z|}$.
4. Si $z'\neq 0$, alors $\left|\dfrac{z}{z'}\right|=\left|z\times\dfrac{1}{z'}\right|=|z|\times\left|\dfrac{1}{z'}\right|=|z|\times\dfrac{1}{|z'|}=\dfrac{|z|}{|z'|}$.
5. Soient M et M' les points d'affixes respectives *z* et *-z'* . Alors : $|z+z'|=|z-(-z')|=M'M$,
   $|z|=OM$ et $|z'|=|-z'|=OM'$. Or , d'après l'inégalité triangulaire, $MM'\leq OM+OM'$, ce qui s'écrit aussi : $|z+z'|\leq|z|+|z'|$.

Exemples :

A l'aide de ces propriétés, calculons les modules des nombres complexes suivants :

- $\left|(3+i)(1-i)\right| = \left|3+i\right|\left|1-i\right| = \sqrt{3^2+1^2} \times \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{10} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{5}$.
- $\left|(2+i)^4\right| = \left|2+i\right|^4 = \left(\sqrt{2^2+1^2}\right)^4 = 25$
- $\left|\dfrac{1}{5-i}\right| = \dfrac{1}{\left|5-i\right|} = \dfrac{1}{\sqrt{5^2+(-1)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{26}}$
- $\left|\dfrac{3+i}{1-i}\right| = \dfrac{\left|3+i\right|}{\left|1-i\right|} = \dfrac{\sqrt{3^2+1^2}}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{5}$

Exercice :

1) Déterminer l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie : $\left|z+5i\right| = 6$

Soit A le point d'affixe $z_A = -5i$. Alors , pour tout nombre complexe z, $\left|z+5i\right| = \left|z-z_A\right|$. Donc :

$\left|z+5i\right| = 6 \Leftrightarrow \left|z-z_A\right| = 6 \Leftrightarrow AM = 6$. On en conclut que l'ensemble des points M répondant à la question est le cercle de centre A et de rayon 6 .

2) Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z vérifie : $\left|\dfrac{3z-i}{z+1-i}\right| = 3$

Il faut tout d'abord éliminer le point A d'affixe $-1+i$, car pour cette valeur de z le quotient précédent n'existe pas . Ensuite, pour tout $z \neq -1+i$, on peut écrire :

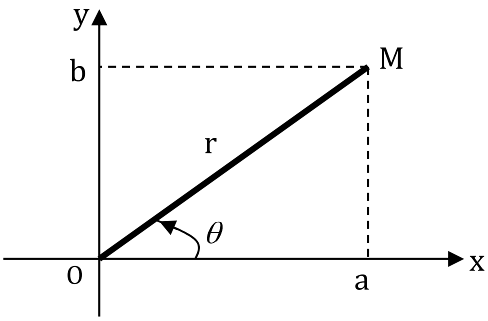
$$\left|\frac{3z-i}{z+1-i}\right| = 3 \Leftrightarrow \frac{\left|3z-i\right|}{\left|z+1-i\right|} = 3 \Leftrightarrow \left|3z-i\right| = 3\left|z+1-i\right| \Leftrightarrow 3\left|z-\frac{i}{3}\right| = 3\left|z+1-i\right|$$

$$\Leftrightarrow \left|z-\frac{i}{3}\right| = \left|z+1-i\right|$$

En appelant B le point d'affixe $\dfrac{i}{3}$, la dernière égalité équivaut à : BM = AM . On en conclut que l'ensemble des points M cherché est la médiatrice Δ du segment [AB] privée éventuellement du point A qui a été exclu dès le début . Mais comme $A \notin \Delta$, l'ensemble des solutions est toute la droite Δ .

3. Argument d'un nombre complexe non nul :

1. Définition (argument d'un nombre complexe non nul)



Appelons M le point image de $z = a + bi$.

On a $M(a, b)$

P est déterminé par :

$\begin{cases} \theta \text{ : mesure en radians de l'angle } (\overrightarrow{e_1},\widehat{\overrightarrow{OM}}) \\ r \text{ : distance } |OM| \end{cases}$

Si θ est un **argument** de *z*, alors tout réel de la forme $\theta + 2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}$ est aussi un argument de z

r est le **module** de *z*, donc $r = |\, z \,| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Si $r \neq 0$ on a : $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{r} & \Rightarrow \quad a = r\,\cos\theta \\ \sin\theta = \dfrac{b}{r} & \Rightarrow \quad b = r\,\sin\theta \end{cases}$

z peut s'écrire $z = a + b\,i = r\,\cos\theta + r\,\sin\theta\; i = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$

Remarques :

- Arg (z) n'est pas unique : il est défini à un multiple de 2π près .
- Le nombre complexe 0 n'a pas d'argument .
- Si z a pour forme trigonométrique $z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$, alors $\arg(z) \equiv \theta\ [\,2\pi\,]$.

Exemple :

$1 + i = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$, donc : $\arg(1+i) \equiv \dfrac{\pi}{4}\ [\,2\pi\,]$.

Cas particuliers :

$\arg(1) \equiv 0\ [\,2\pi\,]$,$\arg(-1) \equiv \pi\ [\,2\pi\,]$, $\arg(i) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\,2\pi\,]$, $\arg(-i) \equiv -\dfrac{\pi}{2}\ [\,2\pi\,]$

Exemple ……………………………………….

Propriété

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ quelconque . Alors :

- $z \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(z) = 0\ [\,\pi\,]$ et $z \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(z) = \dfrac{\pi}{2}\ [\,\pi\,]$
- $\arg(-z) = \pi + \arg(z)\ [\,2\pi\,]$ et $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)\ [\,2\pi\,]$

Démonstration :

- $z \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow M \in (Ox)$ *et* $M \neq O \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}$ non nul et colinéaire à $\vec{u} \Leftrightarrow \left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right) = 0\ [\,2\pi\,]$.
- $z \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow M \in (Oy)$ *et* $M \neq O \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}$ non nul et orthogonal à $\vec{u} \Leftrightarrow \left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [\,2\pi\,]$
- Si $z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$,, alors $\arg(z) = \theta\ [\,2\pi\,]$et
  $-z = -r\,(\cos\theta + i\sin\theta) = r\,(-\cos\theta - i\sin\theta) = r\,(\cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi))$. Ce qui implique que
  $\arg(-z) = \theta + \pi\ [\,2\pi\,]$.

- Si $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, alors $\arg(z) = \theta\ [2\pi]$ et $\bar{z} = r(\cos\theta - i\sin\theta) = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$. Ce qui implique que $\arg(\bar{z}) = -\theta\ [2\pi]$

Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Definition soit z un comlexe non nul

L'ecriture $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = [r, \theta]$ est appellé la forme trigonométrique du nombre complexe $z = a + bi$

avec $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $\begin{cases} a = r\cos\theta \\ b = r\sin\theta \end{cases}$

Exemple

Écrire le nombre $z = -1 + i$ sous sa forme trigonométrique.

On cherche r et θ tels que $z = -1 + i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

- $r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
- $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \dfrac{3\pi}{4}$

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

On ecrit aussi $z = \left[\sqrt{2}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$

Remarque

On écrit parfois $z = r\ cis\theta$

Égalité de deux complexes mis sous forme trigonométrique

Considérons deux nombres complexes

$$z = a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$z' = a' + b'i = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$$

Ces deux nombres sont égaux si et seulement si leurs modules sont égaux et leurs arguments dont égaux à un multiple de 2π près, ce qui s'écrit :

$$z' = z \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r' = r \\ \theta' = \theta + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$[r, \theta] = [r', \theta'] \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r' = r \\ \theta' = \theta + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Produit de deux nombres complexes mis sous forme trigonométrique

$$z = a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$z' = a' + b'i = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$$

$$\begin{aligned} zz' &= r(\cos\theta + i\sin\theta).r'(\cos\theta' + i\sin\theta') \\ &= rr'\left[\cos\theta\cos\theta' + i\cos\theta\sin\theta' + i\sin\theta\cos\theta' + i^2\sin\theta\sin\theta'\right] \\ &= rr'\left[\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta')\right] \\ &= rr'\left[\cos(\theta+\theta') + i\left(\sin(\theta+\theta')\right)\right] \end{aligned}$$

Le produit de deux nombres complexes est un nombre complexe

- dont le module est le produit des modules de ces nombres : $|zz'| = rr'$
- dont l'argument est la somme des arguments de ces nombres : $Arg(zz') = \theta + \theta'$

Généralisation

Le produit de *n* nombres complexes s'écrit sous forme trigonométrique :

$$z = z_1.z_2.z_3. \ \ldots \ .z_n = r_1.r_2.r_3. \ \ldots \ . \ r_n\left[\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\ldots+\theta_n) + i\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\ldots+\theta_n)\right]$$

Il en résulte que la *n*e puissance d'un complexe s'écrit :

$$z^n = z.z.z. \ \ldots \ .z = \left[r(\cos\theta + i\sin\theta)\right]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \quad , \quad n \in \mathrm{N}$$

Donc: $\boxed{z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \quad , \quad n \in \mathbb{N}}$

Dans le cas particulier où **r = 1**, on a la formule de MOIVRE **:**

$$\boxed{\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta}$$

inverse d'un nombre complexe

On considère un nombre complexe z différent de 0. On a

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\left[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right]$$

En effet :

$$\begin{aligned} z.\frac{1}{z} &= r(\cos\theta + i\sin\theta).\frac{1}{r}\left[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right] \\ &= r.\frac{1}{r}\left[\cos(\theta + (-\theta)) + i\sin(\theta + (-\theta))\right] \\ &= \cos 0 + i\sin 0 = 1 \end{aligned}$$

Quotient de deux nombres complexes

$$\frac{z}{z'}=\frac{r}{r'}\left[\cos(\theta-\theta')+i\sin(\theta-\theta')\right]$$

Évident d'après ce qui précède. Car $\frac{z}{z'}=z\times\frac{1}{z'}$

Propriétés (argument et opérations)

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls et n un entier naturel quelconque . Alors :

$\arg(z\times z')=\arg(z)+\arg(z')\ [2\pi]$

$\arg(z^n)=n\times\arg(z)\ [2\pi]$

$\arg\left(\frac{1}{z}\right)=-\arg(z)\ [2\pi]$

$\arg\left(\frac{z}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')\ [2\pi]$

Démonstration :

- Soient $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ et $z'=r'(\cos\theta'+i\sin\theta')$ les formes trigonométriques de z et z', avec $\arg(z)=\theta\ [2\pi]$ et $\arg(z')=\theta'\ [2\pi]$. Alors :

$$z\times z'=r(\cos\theta+i\sin\theta)\times r'(\cos\theta'+i\sin\theta')=rr'(\cos\theta+i\sin\theta)\times(\cos\theta'+i\sin\theta')$$
$$=rr'\left[(\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta')+i(\cos\theta\sin\theta'+\cos\theta'\sin\theta)\right]=rr'\left[\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')\right]$$

On en déduit que : $\arg(z\times z')=\theta+\theta\ [2\pi]$.

- Par recurrence
- Comme $z\times\frac{1}{z}=1$, alors $\arg\left(z\times\frac{1}{z}\right)=\arg(1)=0\ [2\pi]$. Donc : $\arg(z)+\arg\left(\frac{1}{z}\right)=0\ [2\pi]$. D'où $\arg\left(\frac{1}{z}\right)=-\arg(z)\ [2\pi]$.
- Comme $\frac{z}{z'}=z\times\frac{1}{z'}$, alors $\arg\left(\frac{z}{z'}\right)=\arg\left(z\times\frac{1}{z'}\right)=\arg(z)+\arg\left(\frac{1}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')\ [2\pi]$

Consequence :

Soit z un nombre complexe non nul et k un réel non nul . Alors :

$$\arg(k\times z)=\begin{cases}\arg(z)\ [2\pi] & si\ \ k>0\\ \arg(z)+\pi\ [2\pi] & si\ \ k<0\end{cases}$$

Exemples :

Soient $z=1+i$ et $z'=\sqrt{3}-i$.

1. Calculons $\arg(z)$, $\arg(z')$, $\arg(zz')$ et $\arg\left(\frac{z}{z'}\right)$:

- Comme $|z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$, alors $z=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. D'où $\arg(z)=\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

- De même $|z'| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = 2$. Alors : $z' = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6})\right)$. D'où $\arg(z') = -\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.
- Il en découle que $\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z') = \frac{\pi}{12}\ [2\pi]$ et que $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') = \frac{5\pi}{12}\ [2\pi]$.

2. Les calculs précédents permettent alors de calculer le cosinus et le sinus de $\frac{\pi}{12}$ et de $\frac{5\pi}{12}$. Pour cela, il suffit de déterminer les formes algébriques et trigonométriques de $z \times z'$ et de $\frac{z}{z'}$:

- Comme $|z \times z'| = |z| \times |z'| = 2\sqrt{2}$ et que $\arg(z \times z') = \frac{\pi}{12}\ [2\pi]$, alors la forme trigonométrique de $z \times z'$ est : $z \times z' = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$. Mais sa forme algébrique est $z \times z' = (1+i)(\sqrt{3} - i) = (\sqrt{3}+1) + i(\sqrt{3}-1)$. Par identification, on obtient alors : $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ et $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

En suivant la même démarche, on a : $\frac{z}{z'} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$ d'une part et
$\frac{z}{z'} = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{(1+i)(\sqrt{3}+i)}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)} = \frac{\sqrt{3}-1}{4} + i\frac{\sqrt{3}+1}{4}$ d'autre part . En identifiant, on conclut alors que $\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ et que $\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

2) Calculons $(\sqrt{3}-i)^6$ en déterminant son module et un de ses arguments :
$\left|(\sqrt{3}-i)^6\right| = \left|\sqrt{3}-i\right|^6 = 2^6 = 64$ et $\arg\left((\sqrt{3}-i)^6\right) = 6\arg(\sqrt{3}-i) = 6 \times (-\frac{\pi}{6}) = \pi\ [2\pi]$ Donc :
$(\sqrt{3}-i)^6 = 64(\cos\pi + i\sin\pi) = -64$.

Propriétés geometriques

Pour tous points A, B, C et D du plan complexe distincts deux à deux, on a :
$\arg(z_B - z_A) \equiv (\vec{u}; \overrightarrow{AB})\ [2\pi]$ et $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD})\ [2\pi]$

Démonstration :

- Soit M le point du plan tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$. Alors : $z_B - z_A = z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{OM}} = z_M - z_O = z_M$. Donc $\arg(z_B - z_A) = \arg(z_M) = (\vec{u}; \overrightarrow{OM}) \equiv (\vec{u}; \overrightarrow{AB})\ [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A) = (\vec{u}; \overrightarrow{CD}) - (\vec{u}; \overrightarrow{AB}) \equiv (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD})\ [2\pi]$

d'après la relation de Chasles sur les angles orientés .

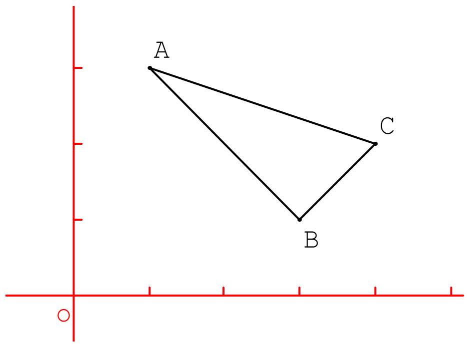
Exemple :

Soient A, B et C les points du plan complexe d'affixes respectives $z_A = 1+3i$, $z_B = 3+i$ et $z_C = 4+2i$.
Démontrons que ABC est un triangle rectangle .
La figure semble indiquer que l'angle droit est au sommet B . C'est pourquoi nous allons calculer :

$$(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = \arg\left(\frac{(4+2i)-(3+i)}{(1+3i)-(3+i)}\right)$$

$$= \arg\left(\frac{1+i}{-2+2i}\right) = \arg\left(\frac{(1+i)(-2-2i)}{(-2+2i)(-2-2i)}\right)$$

$$= \arg\left(\frac{-4i}{(-2)^2+2^2}\right) = \arg(-\frac{1}{2}i) = -\frac{\pi}{2}\ [\,2\pi\,]$$



Le triangle ABC est donc rectangle en B .

Remarque, $[r,\theta] = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$[r_1,\theta_1][r_2,\theta_2] = [r_1 r_2, \theta_1 + \theta_2]$$

$$\frac{[r_1,\theta_1]}{[r_2,\theta_2]} = \left[\frac{r_1}{r_2}, \theta_1 - \theta_2\right]$$

$$[r,\theta]^n = r(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

Application du formule de moivre $\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta}$

1-developper $\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^2}$ *puis deduire la valeur du* $\boxed{\cos 2\theta \text{ et } \sin 2\theta}$
2- developper $\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^3}$ *puis deduire la valeur du* $\boxed{\cos 3\theta \text{ et } \sin 3\theta}$

4. Forme exponentielle d'un nombre complexe :

1. Exponentielle complexe

Définition

Soit θ un réel quelconque . On appelle exponentielle de $i\theta$ le nombre complexe noté $e^{i\theta}$ défini par $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. Les nombres de la forme $e^{i\theta}$ sont appelés exponentielles complexes .

Exemples :

$e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $e^{-i\frac{\pi}{4}} = \cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Cas particuliers :

$e^{i0} = 1$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ et $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$.

Conséquence :

Pour tout réel θ, $\left|e^{i\theta}\right| = 1$ et $\arg(e^{i\theta}) \equiv \theta\ [\ 2\pi\ ]$.

2. Propriétés des exponentielles complexes

Propriété :

Pour tous réels θ et θ' et pour tout entier naturel n, on a :

1. $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
2. $e^{i(\theta+\pi)} = -e^{i\theta}$
3. $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
4. $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$
5. $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$

Démonstration :

1. $\overline{e^{i\theta}} = \overline{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = e^{-i\theta}$
2. $e^{i(\theta+\pi)} = \cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi) = -\cos\theta - i\sin\theta$
3. Déjà démontré en introduction
4. Posons $Z = \left(e^{i\theta}\right)^n$. Alors $|Z| = \left|(e^{i\theta})^n\right| = \left|e^{i\theta}\right|^n = 1^n = 1$ car $\left|e^{i\theta}\right| = 1$.
   De plus, $\arg(Z) = \arg\left((e^{i\theta})^n\right) = n\arg(e^{i\theta}) = n\theta\ \ [2\pi]$
   Donc Z a pour forme algébrique : $Z = \cos(n\vartheta) + i\sin(n\theta)$ et par conséquent $Z = e^{in\theta}$.
5. Posons $Z = \frac{1}{e^{i\theta}}$.Alors $|Z| = \left|\frac{1}{e^{i\theta}}\right| = \frac{1}{\left|e^{i\theta}\right|} = 1$ et $\arg(Z) = \arg\left(\frac{1}{e^{i\theta}}\right) = -\arg(e^{i\theta}) = -\theta\ \ [2\pi]$.
   Donc Z a pour forme algébrique : $Z = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$ et par suite $Z = e^{-i\theta}$.
6. $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i\theta} \times \frac{1}{e^{i\theta'}} = e^{i\theta} \times e^{-i\theta'} = e^{i(\theta-\theta')}$

- La propriété 4 est connue sous le nom de formule de Moivre ; elle peut aussi s'écrire :
  $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$. ou encore $[1,\theta]^n = [1, n\theta]$

Exemple :

Calculons $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5$ en utilisant son écriture exponentielle :

Comme $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{\pi}{3}}$, alors $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5=(e^{i\frac{\pi}{3}})^5=e^{i\frac{5\pi}{3}}=\cos(\frac{5\pi}{3})+i\sin(\frac{5\pi}{3})=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Propriété (formules d'euler)

Pour tout réel θ, on a : $\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

Démonstration :

Il suffit d'écrire les formules $z+\bar{z}=2Re(z)$ et $z-\bar{z}=2i\,\mathrm{Im}(z)$ pour $z=e^{i\theta}$. En effet, pour $z=e^{i\theta}$, $\bar{z}=e^{-i\theta}$, $Re(z)=\cos\theta$ et $\mathrm{Im}(z)=\sin\theta$.

Exemple :

Soit $Z=1+e^{i\theta}$ avec $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$. Ecrivons Z sous forme trigonométrique :

$Z=e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}})=e^{i\frac{\theta}{2}}\times 2\cos\theta=2\cos\theta(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2})$, ce qui est la forme trigonométrique de Z car, θ étant compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, $2\cos\theta$ est strictement positif et on a donc $|z|=2\cos\theta$ et $\arg(z)\equiv\frac{\theta}{2}\,[\,2\pi\,]$

3. Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul :

Soit z un nombre complexe non nul et $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ sa forme trigonométrique ,avec $r>0$. Alors, avec les notations introduites précédemment, on peut aussi écrire que $z=r\,e^{i\theta}$.

Définition

Soit z un nombre complexe non nul . Notons $r=|z|$ et $\theta=\arg(z)\,[\,2\pi\,]$.

Alors l'écriture de z sous la forme $z=r\,e^{i\theta}$ s'appelle forme exponentielle de z .

Exemple :

$2=2e^{i0}$, $-3=3e^{i\pi}$, $5i=5e^{i\frac{\pi}{2}}$, $1+i=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Propriétés

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls de formes exponentielles $z=r\,e^{i\theta}$ et $z'=r'e^{i\theta'}$ et soit n un entier naturel non nul . Alors :

$\bar{z}=r\,e^{-i\theta}$

$-z=r\,e^{i(\theta+\pi)}$

$z\times z'=rr'e^{i(\theta+\theta')}$

$z^n=r^n\,e^{in\theta}$

$\frac{1}{z}=\frac{1}{r}e^{-i\theta}$

$\frac{z}{z'}=\frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$

Exemple :

En utilisant ces propriétés, déterminons la forme exponentielle des nombres complexes suivants :

$$(-1+i)^8 = \left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^8 = \left(\sqrt{2}\right)^8 e^{i\frac{24\pi}{4}} = 2^4\, e^{6i\pi} = 16\, e^{i0}$$

$$\frac{2-2i}{\sqrt{3}+i} = \frac{2\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2\, e^{i\frac{\pi}{6}}} = \sqrt{2}\, e^{i(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})} = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{5\pi}{12}}$$

Ensemble de points dont l'affixe vérifie une propriété

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$.

Avant tout ce qu'il faut comprendre, c'est la correspondance entre les nombres complexes et le plan. A toute propriété sur des nombres complexes corresponds une propriété sur les images de ces nombres complexes.

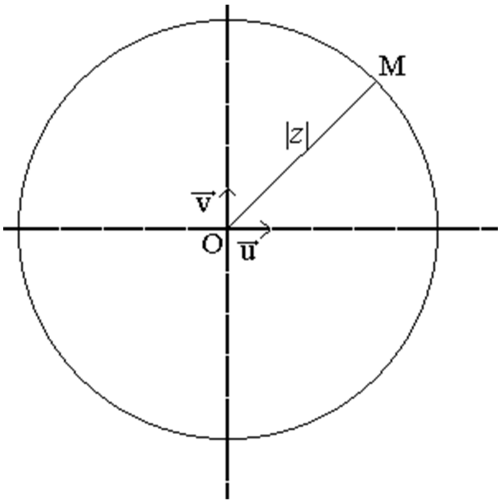
A un nombre complexe correspond un point ou un vecteur.

A un module de nombre complexe correspond une distance ou une norme de vecteur.

A un argument de nombre complexe correspond une mesure d'angle orienté de vecteurs.

Exemples d'ensembles de points :

- Ensemble des points M d'affixe z tels que :
  $|z| = R$
  où R est un nombre réel strictement positif.
  Cet ensemble est le cercle de centre O et de rayon R.



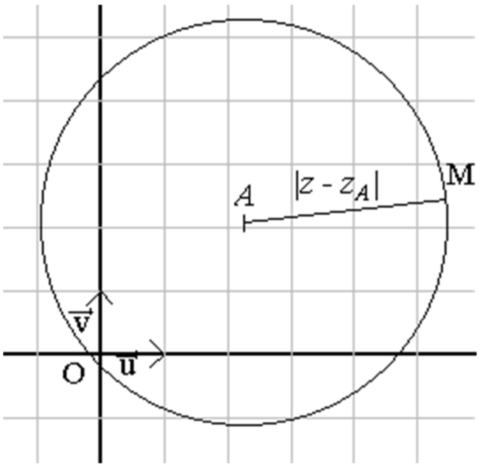
Explication :

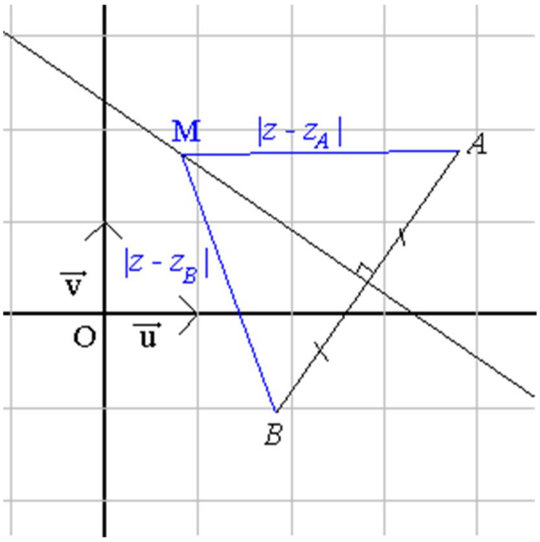
à z est l'affixe du point M ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$

à $|z|$ est la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$ c'est à dire la distance OM

l'ensemble des points M du plan tels que $|z| = R$

est donc l'ensemble des points M tels que $OM = R$

- Ensemble des points M d'affixe z tels que :
  $|z - z_A| = R$
  où z_A est l'affixe d'un point A du plan et R est un nombre réel strictement positif.
  Cet ensemble de point est le cercle de centre A et de rayon R.
  

  Explication :
  à z est l'affixe du point M ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$
  à z_A est l'affixe du point A ou du vecteur $\overrightarrow{OA}$
  $z - z_A$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AM}$
  $|z - z_A|$ est la norme du vecteur $\overrightarrow{AM}$ c'est à dire la distance AM
  l'ensemble des points M du plan tels que $|z - z_A| = R$
  est donc l'ensemble des points M tels que $AM = R$
- Ensemble des points M d'affixe z tels que
  $|z - z_A| = |z - z_B|$
  où z_A et z_B sont les l'affixes respectifs de deux points A et B distincts du plan. Cet ensemble de points est la médiatrice du segment [AB]
  

-

Explication :

$z - z_A$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AM}$

$z - z_B$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{BM}$

$|z - z_A|$ est la distance AM

$|z - z_B|$ est la distance BM

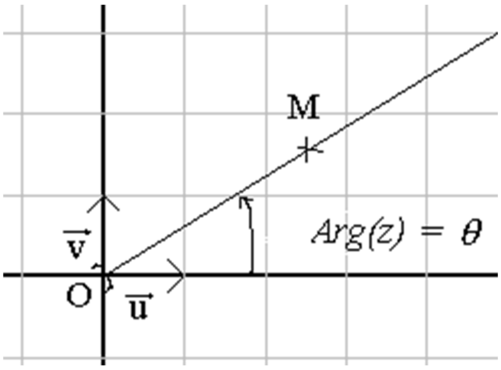
l'ensemble des points M du plan tels que $|z - z_A| = |z - z_B|$

est donc l'ensemble des points M tels que $AM = BM$

- Ensemble des points M d'affixe z tel que

  $Arg(z) = \theta$

  Cet ensemble est une demi droite d'origine O (O non compris dans la demi droite) et dont l'angle avec l'axe (O ; $\vec{u}$) mesure θ radians.

- **Explication :**

  z est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$

  Arg(z) est une mesure de l'angle ($\vec{u}$; $\overrightarrow{OM}$)

  l'ensemble des points M tels que $Arg(z) = \theta$ est l'ensemble des points M tels que mes ($\vec{u}$; $\overrightarrow{OM}$) = θ

- Ensemble des points M d'affixe z tels que

  $Arg(z - z_A) = \theta$

  où z_A est l'affixe d'un point A et θ est un réel .

  Cet ensemble est une demi droite d'origine A (A non compris dans cette demi-droite) et dont l'angle avec la parallèle à l'axe des réels passant par A mesure θ radians.

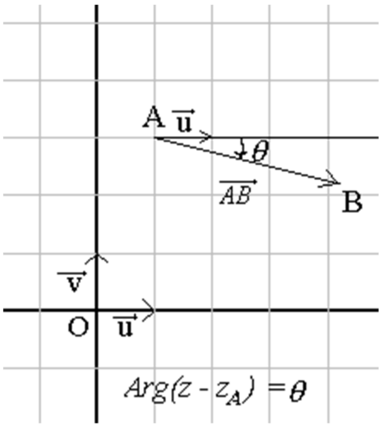
- **Explication :**

  $z - z_A$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AM}$

  $Arg(z - z_A)$ est une mesure de l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{AM})$

  l'ensemble des points M du plan tels que $Arg(z - z_A) = \theta$

- est l'ensemble des points M tels que $mes(\vec{u}; \overrightarrow{AM}) = \theta$



- L'ensemble des points M d'affixe z tel que z est réel est l'axe des réels.
- L'ensemble des points M d'affixe z tel que z est un imaginaire pur est l'axe des imaginaires purs.

La linearisation

Forme exponentielle :

Soit z un nombre complexe non nul de module r et d'argument θ

On a $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ est la forme trigonométrique du nombre complexe z

L'ecriture $z = re^{i\theta}$ est appellé la forme exponentielle du nombre z

On a alors $z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

Exemples de forme exponentielle :

$z_1 = 3e^{-i\frac{\pi}{2}}$ $z_2 = \sqrt{3}e^{i\pi}$ $z_3 = \frac{4}{3}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

La notation exponentielle z la notation $re^{i\theta}$ obéit aux mêmes règles que les nombres réels, sur les produits et les puissances. En conséquence :

$r_1e^{i\theta_1} r_2e^{i\theta_2} = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

donc

$|zz'| = |z|\,|z'|$

$\arg(zz') = \arg z + \arg z'$

$\frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

donc

$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z'$

$\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{i(n\theta)}$

donc

$|z^n| = |z|^n$

$\arg(z^n) = n \arg z$

Formules d'euler

On a alors $z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ et $\overline{z} = e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$

Donc $$\begin{aligned} e^{i\theta} + e^{-i\theta} &= 2\cos\theta \\ et\ \ e^{i\theta} - e^{-i\theta} &= 2i\sin\theta \end{aligned}$$

Donc $$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ et\ \ \sin\theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{aligned}$$

ces deux formules sont appellées formules d'euler

Et plus generalements on a $$\begin{aligned} \cos n\theta &= \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} \\ et\ \ \sin n\theta &= \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i} \end{aligned}$$

Application

Lineariser 1) $\cos^2 x$

2) $\sin^2 x$

3) $\cos^3 x$

4) $\sin^3 x$

Résolution d'une équation du second degré dans l'ensemble des nombres complexes

Equation du second degre dans $\mathbb{C}$

1-les racines carre d'un nombre complexe non nul

a-definition

on dit que z est une racine carre de Z si et ssi $z^2 = Z$

b- racines carre d'un nombre complexe non nul

1cas $Z \in \mathbb{R}_+^*$

Les racines carre de Z sont $\sqrt{Z}$ et $-\sqrt{Z}$

2cas $Z \in \mathbb{R}_-^*$

On a $Z = -(-Z) = i^2(-Z) = \left(\sqrt{-Z} - i\right)^2 = \left(\sqrt{-Z} - i\right)^2$

Donc les racines carre de Z sont $\sqrt{-Z}\, i$ et $-\sqrt{-Z}\, i$

Exemple $Z = -3 = 3\, i^2$

Donc les racines carre de -3 sont $\sqrt{3}\, i$ et $-\sqrt{3}\, i$

Propriete

Tout nombre complexe non nul admet Deux racines carrées différentes et opposées

2- Equation du second degre dans $\mathbb{C}$

soit a,b et c des nombre reelles tel que a≠0 alors on a

$$(E) : a z^2 + b z + c = 0 \Leftrightarrow z^2 + \frac{b}{a} z + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 + 2\frac{b}{2a} z + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ab^2}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac = \delta^2$ donc

$$(E) : \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} = \frac{\delta^2}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow z + \frac{b}{2a} = \frac{\delta}{2a} \quad \text{ou} \quad z + \frac{b}{2a} = \frac{-\delta}{2a}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-b + \delta}{2a} \quad \text{ou} \quad z = \frac{-b - \delta}{2a}$$

Donc la solution de l'equation $(E) : a z^2 + b z + c = 0$ est

$$S = \left\{\frac{-b + \delta}{2a} ; \frac{-b - \delta}{2a}\right\}$$

Propriete

Donc la solution de l'equation $(E)\ :\ a z^2 + b z + c = 0$

est $S = \left\{ \frac{-b + \delta}{2a} \ ; \ \frac{-b - \delta}{2a} \right\}$ Tel que $\Delta = b^2 - 4ac = \delta^2$

application

resoudre les equation suivantes

E_1 $z^2 + z + 1 = 0$

on a $\Delta = b^2 - 4ac$

$= 1 - 4$

$= -3$

$= 3i^2$

$= \left(\sqrt{3}\, i\right)^2$

donc $\delta = \sqrt{3}\, i$: إذن

alors

$z_1 = \frac{-1 - \sqrt{3}\, i}{2}$ et $z_2 = \frac{-1 + \sqrt{3}\, i}{2}$

$S = \left\{ \frac{-1 - \sqrt{3}\, i}{2} \ ; \ \frac{-1 + \sqrt{3}\, i}{2} \right\}$

E_2 $z^2 + 2z + \frac{1}{\cos^2 \theta} = 0\ telque\ 0 \prec \theta \prec \frac{\pi}{2}$

on a $z^2 + 2z + \frac{1}{\cos^2 \theta} = 0$

donc $\Delta = 4 - \frac{4}{\cos^2 \theta}$

$$= 4\left(1 - \frac{1}{\cos^2 \theta}\right)$$

$$= 4\left(\frac{\cos^2 \theta - 1}{\cos^2 \theta}\right)$$

$$= 4\left(\frac{-\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}\right)$$

$$= -4\tan^2\theta$$

$$= (2i\tan\theta)^2$$

$$donc \quad \delta = 2i\tan\theta$$

alors

$$z_1 = \frac{2 - 2i\tan\theta}{2} = 1 - i\tan\theta \quad \text{Et} \quad z_2 = \frac{+2 + 2i\tan\theta}{2} = +1 + i\tan\theta$$

donc $S = \{1 - i\tan\theta \;;\; 1 + i\tan\theta\}$

2 methode

$$on\,a\; z^2 - 2z + \frac{1}{\cos\theta} = 0$$

donc $z^2 - 2z + 1 + \tan^2\theta = 0$

donc $(z-1)^2 = -\tan^2\theta$

donc $(z-1)^2 = (i\tan\theta)^2$

donc $z-1 = i\tan\theta$ ou $z-1 = -i\tan\theta$

$z = 1 + i\tan\theta$ ou $z = 1 - i\tan\theta$

$$donc\, S = \{1 - i\tan\theta \;;\; 1 + i\tan\theta\}$$

Ecrire les solution sous la forme tyrigonometrique

on a $z_1 = 1 - i\tan\theta$

$$= 1 - i\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{\cos\theta}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

$$= \frac{1}{\cos\theta}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$$

$$= \left[\frac{1}{\cos\theta}, -\theta\right] \quad \text{car} \quad 0 \prec \cos\theta$$

et on a $z_2 = 1 + i\tan\theta$

$$= \frac{1}{\cos\theta}(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$= \left[\frac{1}{\cos\theta} \ , \ \theta \right]$$

remarque

$si \quad \frac{\pi}{2} \prec \theta \prec \pi$

on a $\quad \cos \theta \prec 0$

$$donc \quad z_1 = \frac{1}{\cos\theta} \left(\cos\theta + i \sin\theta\right)$$

$$= \frac{-1}{\cos\theta} (-1) \left(\cos\theta + i \sin\theta\right)$$

$$= \frac{-1}{\cos\theta} [1 , \pi] [1 , \theta]$$

$$= \frac{-1}{\cos\theta} [1 \ , \ \pi + \theta]$$

$$= \left[\frac{-1}{\cos\theta} \ , \ \pi + \theta \right]$$

Résoudre l'équation $E_3 \qquad z^2 - 2z + 5 = 0$

on a $\Delta = (-2)^2 - 4(1)(5) = 4 - 20 = -16 = 16i^2 = (4i)^2$

$z = \frac{2 \pm 4i}{2}$ et $z = 1 + 2i$ ou $z = 1 - 2i$

Conclusion

Dans l'ensemble des nombres complexes, toute équation du second degré possède deux racines (distinctes ou non). En particulier, lorsque ses coefficients sont réels, ses racines sont soit réelles, soit complexes conjuguées.

Ceci devient évident au départ de la formule qui permet de déterminer les racines d'une équation du second degré :

$$x = \frac{-b \pm \delta}{2a} avec\, \delta^2 = \Delta = b^2 - 4ac$$

Tout trinôme du second degré est donc factorisable dans $\boldsymbol{C}$:

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1).(z - z_2)$$

Généralisation

Dans l'ensemble des nombres complexes, toute équation de degré *n* possède *n* solutions complexes ou réelles.