Exercice 1 :

Soit (u_n) la suite numérique définie par :
$$\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{n \cdot u_n + 3}{n+1} \end{cases} \text{ pour tout } n \geq 1$$

(v_n) telle que $v_n = n \cdot u_n$ pour tout $n \geq 1$

- 1°) a) Calculer u_1 , u_2 et u_3
 b) Calculer v_1 , v_2 et v_3
- 2°) a) Exprimer v_{n+1} en fonction de u_n
 b) Calculer $v_{n+1} - v_n$. Que dire de la suite (v_n) ?
 c) Donner alors l'expression explicite de v_n
- 3°) a) Calculer la somme $v_1 + v_2 + \dots + v_{20}$
 b) Pour quelle valeur de p , $v_p = 92$?
 c) Calculer alors la somme $v_1 + v_2 + \dots + v_p$

Exercice 2 :

On considère la suite (u_n) définie par
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{3u_n + 1} \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- 1°) Calculer u_1 et u_2
- 2°) Soit (v_n) telle que $v_n = \frac{1}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- a) Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on déterminera la raison r
 b) Donner l'expression explicite de v_n . En déduire celle de u_n
 c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Exercice 3 :

On considère la suite (u_n) définie par
$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{n \cdot u_n}{n+1} \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$
, et la suite (v_n)

définie par $v_n = n(u_n - 1)$ pour tout $n > 0$

- 1°) Calculer u_2 , u_3 et u_4
- 2°) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison r à déterminer.

- 3°) Donner l'expression explicite de v_n , puis celle de u_n
- 4°) Etudier le signe de $u_{n+1} - u_n$. Interpréter
- 5°) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Exercice 4 :

On considère la suite (u_n) définie par
$$\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On pose $v_n = u_n - 2$

- 1°) Calculer u_1 , v_0 et v_1
- 2°) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison q
- 3°) a) Expliciter v_n et calculer sa limite
b) Expliciter u_n et calculer sa limite
- 4°) a) Exprimer la somme $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$
b) En déduire l'expression de $S'_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

Exercice 5 :

On considère la suite (u_n) définie par
$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{4}{4 - u_n} \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- 1°) Calculer u_1 et u_2
- 2°) Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{1}{u_n - 2}$ est arithmétique dont on déterminera sa raison et son premier terme.
- 3°) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n
- 4°) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et la somme $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

Exercice 6 :

On considère la suite (u_n) définie par
$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{n+1}{2n} \cdot u_n \end{cases} \text{ pour tout } n > 0$$

- 1°) Calculer u_2 , u_3 et u_4
- 2°) Soit (v_n) la suite numérique définie pour tout $n > 0$ par $v_n = \frac{u_n}{n}$
 - a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison q et le premier terme v_1

b) Donner l'expression explicite de v_n

c) En déduire l'expression explicite de u_n . Calculer u_2, u_3, u_4, u_{50}

Exercice 7 :

On considère la suite (u_n) définie par
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ 3u_{n+1} = u_n - 1 \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Soit (v_n) la suite définie par $v_n = 2u_n + 1$

1°) Calculer u_1, u_2, v_0, v_1 et v_2

2°) a) Exprimer v_{n+1} en fonction de u_n puis en fonction de v_n

b) En déduire que (v_n) est une suite géométrique, préciser sa raison

c) Exprimer v_n , puis u_n en fonction de n .

En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

d) Déterminer $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ en fonction de n

En déduire $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

Exercice 8 :

Soit (u_n) la suite définie par
$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4} \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1°) Calculer les trois premiers termes de la suite (u_n)

2°) On considère la suite (v_n) telle que $v_n = \frac{u_n + 3}{u_n - 4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

a) Calculer v_0, v_1 et v_2

b) Montrer que (v_n) est une suite géométrique. Quelle est sa raison ?

c) Exprimer v_n , puis u_n en fonction de n .

d) Calculer $v_{n+1} - v_n$. En déduire le sens de variation de la suite (v_n)

3°) Calculer les limites de (u_n) et (v_n)

4°) Calculer $S_n = v_1 + \dots + v_n$ en fonction de n

Exercice 9 :

On considère la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + a \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},$$

où $a \in \mathbb{R}$

1°) Sachant que $u_2 = \frac{5}{4}$, calculer a

2°) Dans cette question, on prend $a = \frac{1}{2}$. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison q et le premier terme

b) Exprimer v_n , puis u_n , en fonction de n

c) Calculer la limite de v_n et celle de u_n

3°) Exprimer les sommes suivantes en fonction de n :

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n \quad \text{et} \quad S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

Exercice 10 :

Soit (u_n) la suite numérique définie par
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{5}{6} \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1°) Calculer u_1 , u_2 et u_3

2°) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = 3u_n + 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser la raison q et le premier terme v_0

b) Exprimer v_n , puis u_n en fonction de n .

c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Exercice 11 :

On considère la suite géométrique définie de la façon suivante :

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 2u_n, \quad \text{pour tout } n \geq 0$$

1°) Calculer u_2 , u_3 et u_4

2°) Exprimer u_n en fonction de n , pour tout $n \geq 1$.

Calculer une valeur approchée de u_{64}

Exercice 12 :

On considère la suite (u_n) définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n} \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1°) Calculer u_1 , u_2 et u_3

2°) a) Montrer que si $0 \leq u_n \leq 1$, alors $0 \leq u_{n+1} \leq 1$

b) Que peut-on dire de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$?

Exercice 13 :

On considère la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n} \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1°) Calculer u_1 et u_2 . La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ? Ni l'un ni l'autre ?

2°) Démontrer que, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 3$

3°) On considère la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$

a) Calculer v_0 , v_1 et v_2 . Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

b) Exprimer v_n en fonction de n

c) Exprimer u_n en fonction de v_n puis de n . Que vaut u_{10} ?

Exercice 14 :

On considère la suite (u_n) définie par
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 5u_n \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1°) Calculer u_2 , u_3 et u_4

2°) a) Montrer que le terme général u_n est de la forme $u_n = A \times 5^n + B$,
($A, B \in \mathbb{R}$)

b) Déterminer A et B puis recalculer u_2 , u_3 , u_4 et u_{10}

Exercice 15 :

Soit la suite (u_n) telle que :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1°) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$

b) Montrer que si $u_n \leq 2$, alors $u_{n+1} \leq 2$. Que dire de la suite (u_n) ?

2°) a) Remarquer que $u_{n+1} + u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

et que $u_{n+1} - u_n$ est du même signe que $(u_{n+1} - u_n)(u_{n+1} + u_n)$

b) Etudier alors dans $[0;2]$ le signe de $u_{n+1} - u_n$

c) Quelle est la variation de (u_n) ?

3°) En déduire qu'elle est convergente et donner sa limite