

# ENSEMBLES DE NOMBRES

## Définitions et notations

### 1. Nombres entiers naturels

Un nombre entier naturel est un nombre entier qui est positif.

L'ensemble des **nombres entiers naturels** est noté  $\mathbb{N}$ .

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4 \dots\}.$$

Exemples :

$$4 \in \mathbb{N}$$

$$-2 \notin \mathbb{N}$$

### 2. Nombres entiers relatifs

Un nombre entier relatif est un nombre entier qui est positif ou négatif.

L'ensemble des **nombres entiers relatifs** est noté  $\mathbb{Z}$ .

$$\mathbb{Z} = \{\dots - 3; -2; -1; 0; 1; 2; 3 \dots\}.$$

Exemples :

$$-2 \in \mathbb{Z}$$

$$5 \in \mathbb{Z}$$

$$0,33 \notin \mathbb{Z}$$

### 3. Nombres décimaux

Un nombre décimal peut s'écrire avec un nombre fini de chiffres après la virgule.

L'ensemble des **nombres décimaux** est noté  $\mathbb{D}$ .

Exemples :

$$0,56 \in \mathbb{D}$$

$$3 \in \mathbb{D}$$

$$\frac{1}{3} \notin \mathbb{D} \text{ mais } \frac{3}{4} \in \mathbb{D}$$

### 4. Nombres rationnels

Un nombre rationnel peut s'écrire sous la forme d'un quotient  $\frac{a}{b}$  avec  $a$  un entier et  $b$  un entier non nul.

L'ensemble des **nombres rationnels** est noté  $\mathbb{Q}$ .

Exemples :

$$\frac{1}{5} \in \mathbb{Q}$$

$$4 \in \mathbb{Q}$$

$$-3.2 \in \mathbb{Q}$$

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

## 5. Nombres réels

L'ensemble des **nombres réels** est noté  $\mathbb{R}$ .

C'est l'ensemble de tous les nombres que nous utiliserons en classe de seconde.

Exemples :

2, 0, -5, 0.67,  $\frac{1}{3}$ ,  $\sqrt{3}$  ou  $\pi$  appartiennent à  $\mathbb{R}$ .

## 6. Ensemble vide

Un ensemble qui ne contient pas de nombre s'appelle l'**ensemble vide** et se note  $\emptyset$ .

## 7. Symbole d'exclusion

Le signe \* exclu le nombre 0 d'un ensemble.

Par exemple,  $\mathbb{R}^*$  est l'ensemble des nombres réels privé de 0.

## 8. Inclusions

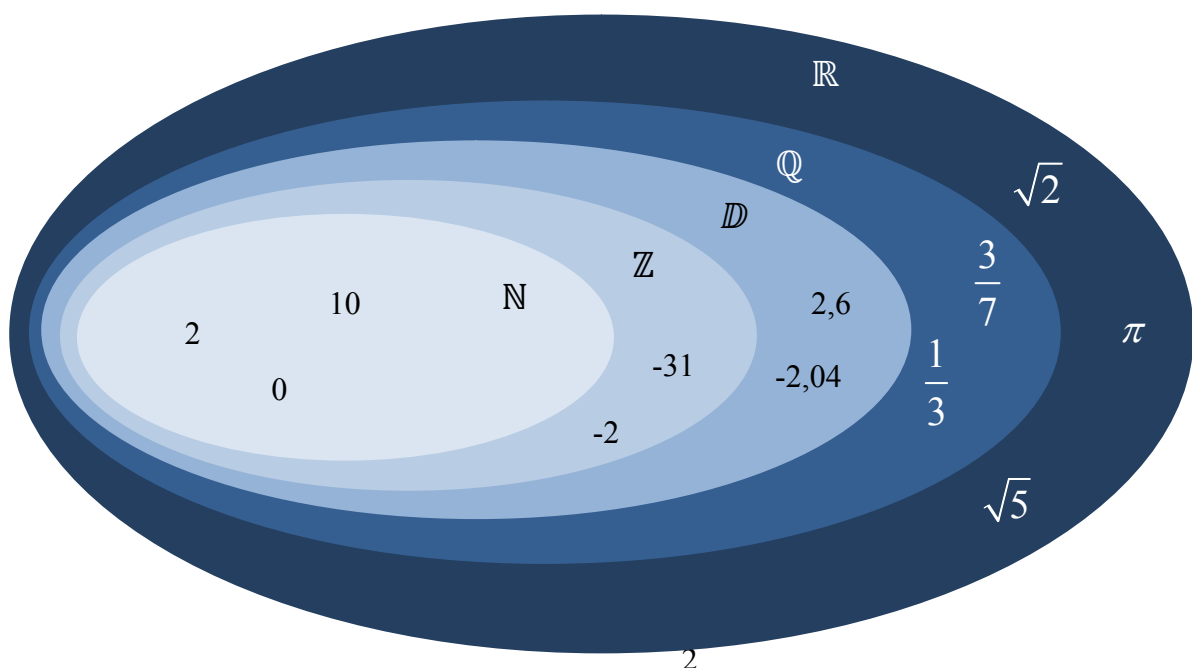
Tous les nombres de l'ensemble des entiers naturels  $\mathbb{N}$  appartiennent à l'ensemble des entiers relatifs  $\mathbb{Z}$ .

On dit que l'ensemble  $\mathbb{N}$  est inclus dans l'ensemble  $\mathbb{Z}$ .

On note :  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ .

On a également les inclusions suivantes :

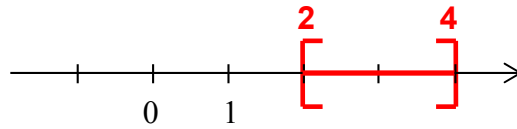
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$



# Intervalles de $\mathbb{R}$

## 1. Notations :

L'ensemble de tous les nombres réels  $x$  tels que  $2 \leq x \leq 4$  peut se représenter sur une droite graduée.



Cet ensemble est appelé un intervalle et se note :  $[2 ; 4]$

*En latin, « intervallum » désignait la distance entre deux pieux.*

### Exemple :

L'ensemble de tous les nombres réels  $x$  tels que  $-2 \leq x \leq 7$  se note :  $[-2 ; 7]$ .

On a par exemple :

$$4 \in [-2 ; 7]$$

$$-1 \in [-2 ; 7]$$

$$8 \notin [-2 ; 7]$$

Nombres réels $x$	Notation	Représentation
$2 \leq x \leq 4$	$[2 ; 4]$	
$-1 < x \leq 3$	$] -1 ; 3 ]$	
$0 \leq x < 2$	$[0 ; 2 [$	
$2 < x < 4$	$]2 ; 4 [$	
$x \geq 2$	$[2 ; +\infty [$ $\infty$ désigne l'infini	
$x > -1$	$] -1 ; +\infty [$	
$x \leq 3$	$] -\infty ; 3 ]$	
$x < 2$	$] -\infty ; 2 [$	

Remarque :

L'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$  est un intervalle qui peut se noter  $] -\infty ; +\infty [$ .

Méthode : Donner les solutions d'une inéquation

Résoudre l'inéquation et donner les solutions sous forme d'un intervalle :  $2x - 3 < 4$

$$2x - 3 < 4$$

$$2x < 4 + 3$$

$$2x < 7$$

$$x < \frac{7}{2}$$

L'ensemble des solutions est l'intervalle  $] -\infty ; \frac{7}{2} [$ .

1. Intervalle ouvert et intervalle fermé :

Définitions :

On dit qu'un intervalle est fermé si ses extrémités appartiennent à l'intervalle.

On dit qu'il est ouvert dans le cas contraire.

Exemples :

- L'intervalle  $[-2 ; 5]$  est un intervalle fermé.

On a :  $-2 \in [-2 ; 5]$  et  $5 \in [-2 ; 5]$

- L'intervalle  $]2 ; 6[$  est un intervalle ouvert.

On a :  $2 \notin ]2 ; 6[$  et  $6 \notin ]2 ; 6[$

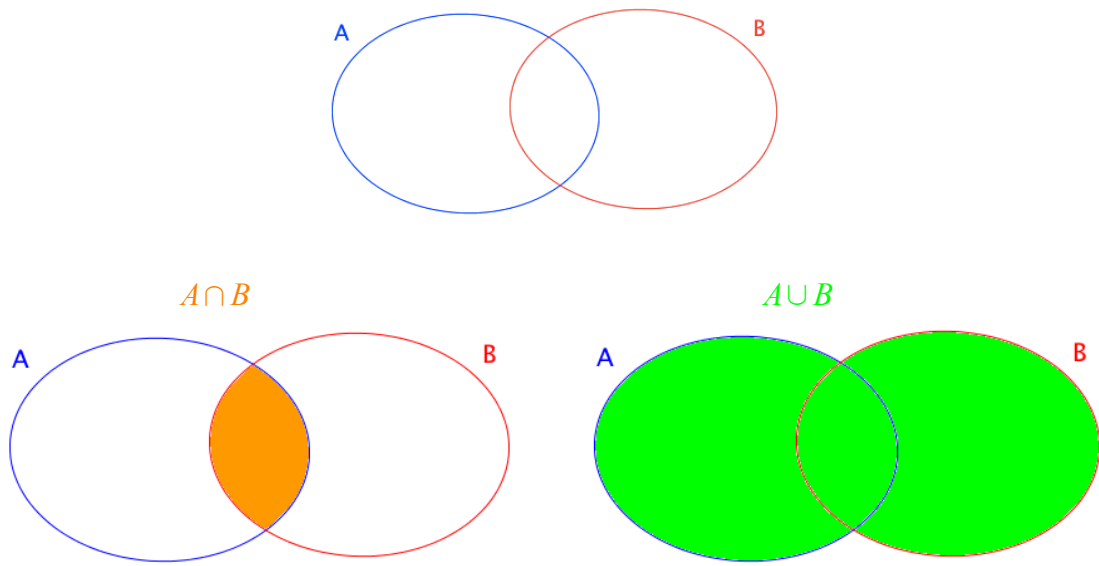
- L'intervalle  $]6 ; +\infty[$  est également un intervalle ouvert.

2. Intersections et unions d'intervalles :

Définitions :

- L'intersection de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A et à B et se note  **$A \cap B$** .

- La réunion de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **ou** à B et se note  **$A \cup B$** .

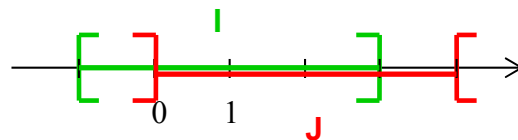


Méthode : Déterminer l'intersection et la réunion d'intervalle

Dans les cas suivants, déterminer l'intersection et la réunion des intervalles I et J :

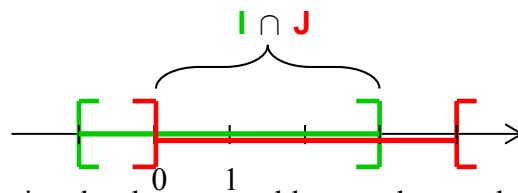
- 1)  $I = [-1 ; 3]$  et  $J = ]0 ; 4[$                       2)  $I = ] -\infty ; -1]$  et  $J = [1 ; 4[$

1) Pour visualiser les ensembles solutions, on peut représenter les intervalles **I** et **J** sur un même axe gradué.

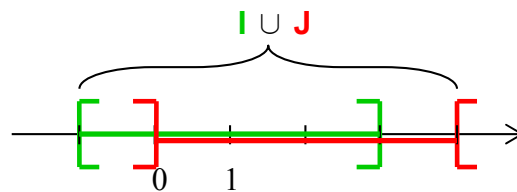


Les nombres de l'intersection des deux ensembles sont les nombres qui appartiennent à la fois aux deux ensembles. Il s'agit donc de la zone de l'axe gradué où les deux ensembles se superposent.

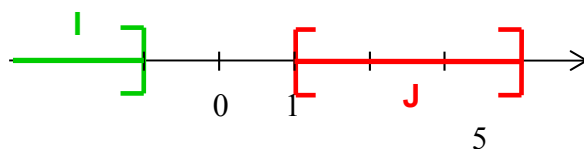
Ainsi  $I \cap J = ]0 ; 3]$ .



Les nombres de la réunion des deux ensembles sont les nombres qui appartiennent au moins à l'un des deux ensembles. Il s'agit donc de la zone de l'axe gradué marquée soit par l'intervalle I soit par l'intervalle J. Ainsi  $I \cup J = [-1 ; 4[$ .



2)



$I \cap J = \emptyset$ , car les ensembles I et J n'ont pas de zone en commun.

$I \cup J = ]-\infty ; -1] \cup [1 ; 4]$

### Exercice 1

1) Effectuer :  $A = \frac{11}{5} - \frac{3}{4}$        $B = \frac{5}{3} - \frac{4}{3} \times \frac{6}{7}$        $C = \frac{5^{-1} \times (5^3)^3}{5 \times 5^2}$

$D = (1 - \sqrt{6})(1 + \sqrt{6})$        $E = (\sqrt{3} - 1)^2$        $F = (3 + 2\sqrt{2})^2$

$G = 7\sqrt{3} - 2\sqrt{12} + 3\sqrt{27}$        $H = \sqrt{18} - \sqrt{2} - 2\sqrt{20}$

2) Déterminer la nature de chacun des nombres précédents.

### Exercice 2

Dans chaque cas, écrire les inégalités sous forme d'un intervalle.

- a)  $2 \leq x \leq 7$       b)  $-2 \leq x < 0$       c)  $-2 < x \leq 6$       d)  $x \leq 9$   
e)  $2 > x$       f)  $9 < x < 11$       g)  $-9 < x$       h)  $13 \geq x$

### Exercice 3

Résoudre chacune des inéquations suivantes et donner le résultat sous forme d'un intervalle.

- a)  $3x - 4 < 8$       b)  $9x - 5 > 5x - 1$       c)  $6x - 7 \leq 7x + 5$   
d)  $5(2x - 3) \geq -5x + 3$       e)  $-(x - 4) < 2x$       f)  $-4(x + 5) \leq 7 - 2x$   
g)  $5x - 1 > -4(x + 1)$       h)  $-7(x - 6) \leq -8x + 4$

### Exercice 4

1) Inventer une inéquation du type  $ax + b \leq cx + d$  (avec  $a, b, c$  et  $d$  réels non nuls) dont la solution est l'intervalle  $]-\infty; 2]$ .

2) Même question avec l'intervalle  $]5; +\infty[$ .

### Exercice 5

Dans chaque cas, commencer par écrire les inégalités sous forme d'intervalles puis déterminer l'intersection des intervalles.

- a)  $0 \leq x \leq 5$  et  $4 \leq x \leq 9$       b)  $-5 < x < -1$  et  $-3 < x < 0$   
c)  $7 \leq x < 9$  et  $2 < x < 8$       d)  $x < 9$  et  $-1 < x \leq 2$   
e)  $x \geq 1$  et  $x \leq 4$       f)  $x > -3$  et  $x < 0$

### Exercice 6

Dans chaque cas, commencer par écrire les inégalités sous forme d'intervalles puis déterminer la réunion des intervalles.

- a)  $0 \leq x \leq 5$  **ou**  $4 \leq x \leq 9$       b)  $-5 < x < -1$  ou  $-3 < x < 0$   
c)  $7 \leq x < 9$  ou  $2 < x < 8$       d)  $x < 9$  ou  $-1 < x \leq 2$   
e)  $x \geq 1$  ou  $x \leq 4$       f)  $x > -3$  ou  $x < 0$