Opérations sur les nombres
les puissances* les racines carrées* Approximations

1-Opérations sur les nombres

Addition:

1^er^ terme : a

$a + b$: somme de a et de b.

2^ème^ terme : b

Soustraction:

1^er^ terme : a

$a - b$: différence entre a et b.

2^ème^ terme : b

Multiplication:

1^er^ facteur : a

$a \times b = a\,b$: produit de a et de b.

2^ème^ facteur : b

Division:

dividende : a

$a / b = \frac{a}{b}$: quotient de a par b.

diviseur : b

Dans le cas de fractions (quotients d'entiers), on dit aussi : a : numérateur et b : dénominateur.

Exponentiation:

base : a

a^{b}: puissance de a d'exposant b.

exposant :

Fonctions élémentaires:

$a \xrightarrow{\textit{opposé}} (-a)$

pour $a \neq 0$ $\quad a \xrightarrow{\textit{inverse}} \frac{1}{a}$

pour a 0 $\quad a \xrightarrow{\textit{racine carrée}} \sqrt{a}$

$a \xrightarrow{\textit{valeur absolue}} |\,a\,|$

2-les puissances

Définition :

Si $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

Pour n = 0 : $a^0 = 1$
Pour n = 1 : $a^1 = a$
Pour n = 2 : $a^2 = a \times a$
De façon générale, pour n > 1 : $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times ...... \times a}_{\text{n facteurs a}}$.

> Vocabulaire :
> a^n est la puissance
> n est l'exposant de la puissance
> a est la base de la puissance

Pour les exposants négatifs, on a : $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

Exemples : $2^0 = 1$; $2^1 = 2$; $2^2 = 4$; $2^3 = 8$; $2^{-1} = \dfrac{1}{2}$; $2^{-2} = \dfrac{1}{4}$; $2^{-3} = \dfrac{1}{8}$; $2^{-4} = \dfrac{1}{16}$

Propriétés de calcul :

Dans les énoncés ci-dessous, a et b sont des réels non nuls et p et q des entiers relatifs quelconques.

1) Même base : $\boxed{a^p \times a^q = a^{p+q}}$ $\boxed{\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}}$ $\boxed{(a^p)^q = a^{p \times q}}$

Exemples :

$2^2 \times 2^3 = 2^5$; $2^3 \times 2 = 2^4$; $2^3 \times 2^{-1} = 2^2$; $2^{-5} \times 2^{-1} = 2^{-6}$; $2^{-3} \times 2 = 2^{-2}$.

$\dfrac{2^5}{2^3} = 2^2$; $\dfrac{2^4}{2^3} = 2$; $\dfrac{2^3}{2^5} = 2^{-2} = \dfrac{1}{4}$; $(2^2)^3 = 2^6$; $(2^{-2})^3 = 2^{-6}$; $(2^{-2})^{-3} = 2^6$.

Attention :

Pas de formule générale pour simplifier $a^p + a^q$ et $a^p - a^q$. Une factorisation est cependant possible.

Par exemple : $2^{50} + 2^{47} = 2^{47} \times 2^3 + 2^{47} \times 1 = 2^{47} \times (2^3 + 1) = 9 \times 2^{47}$.
$a^3 + a^5 = a^3 \times 1 + a^3 \times a^2 = a^3 (1 + a^2)$.

2) Même exposant : $\boxed{a^p \times b^p = (a \times b)^p}$ $\boxed{\dfrac{a^p}{b^p} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^p}$

Exemples :

$2^3 \times 5^3 = 10^3$; $2^{-5} \times 3^{-5} = 6^{-5}$; $\dfrac{6^5}{2^5} = 3^5$.

3)produit remarquable

il est indispensable de connaître les formules:

$$\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2} \quad \text{et} \quad \boxed{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

sans oublier le troisième produit remarquable : $\boxed{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2}$.

Il est aussi parfois utile de connaître:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 \quad \text{et} \quad (a - b)^3 = a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3$$

3-les racines carrées

Propriété et définition :
Tout réel positif a est le carré de deux nombres opposés.
Celui qui est positif est appelé la racine carrée de a.

Exemples :

- 4 est le carré de 2 et de (–2), c'est à dire :

$2^2 = (-2)^2 = 4$.
Comme $2 > 0$, on a : $\sqrt{4} = 2$ et donc :
$-2 = -\sqrt{4}$ car $(-2) < 0$.

- 2 est le carré de $\sqrt{2}$ et de $-\sqrt{2}$, c'est à dire :

$(\sqrt{2})^2 = (-\sqrt{2})^2 = 2$.
On a : $\sqrt{2} > 0$ et donc : $-\sqrt{2} < 0$.

- 0 est le carré d'un seul nombre : 0.

On a : $\sqrt{0} = 0$.

- Les nombres strictement négatifs ne sont pas des carrés de réels.

Par exemple, il est impossible de trouver un réel a tel que $a^2 = -1$.
L'écriture $\sqrt{-1}$ n'a pas de sens…

Résumé :

Le radical $\sqrt{x}$ existe seulement lorsque $x \geq 0$.
Lorsque $\sqrt{x}$ existe, on a : $\sqrt{x} \geq 0$.
Lorsque $x \geq 0$ et $y \geq 0$, on a : $y = \sqrt{x}$ qui est équivalent à : $x = y^2$.

Conséquences de la définition :

Si $x \geq 0$, alors $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$.
Si $x \geq 0$, alors $\sqrt{x^2} = x$ … mais : Si $x < 0$, alors : $\sqrt{x^2} = (-x)$

Ceci peut s'écrire en une seule phrase : $\sqrt{x^2} = |x|$ où le symbole $|x|$ désigne la valeur absolue de x.

Exemples :

- $\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$ et $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 = -(-3)$. On a : $\sqrt{3^2} = \sqrt{(-3)^2} = 3$
- On a : $(\sqrt{2} - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$. Donc : $\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$ car $\sqrt{2} - 1 > 0$.

On a : $(1 - \sqrt{2})^2 = 3 - 2\sqrt{2}$. Donc : $\sqrt{3-2\sqrt{2}} = -(1 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$ car $1 - \sqrt{2} < 0$.
C'est à dire : $\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = \sqrt{2} - 1$

Propriétés de calcul sur les radicaux :
Si $a \in \mathbb{R}^+$ et $b \in \mathbb{R}^+$ alors :

- $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ et si $b \neq 0$, $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.
- mais attention : $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$. idem pour la soustraction.

Par exemple : $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ et $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$.
$\sqrt{18} - \sqrt{8} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2} \neq \sqrt{10}$.

4-Approximations – Arrondis - encadrements

Approximation

Dans les définitions ci-dessous, $x$et $a$sont deux réels et n un entier naturel: $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. L'utilisation des calculatrices permet d'obtenir des approximations décimales. Dans la pratique, le nombre réel $a$est presque toujours un nombre décimal.

- Dire que $a$est une approximation (ou valeur approchée) du réel x à 10^{-n}près signifie que la distance de x à $a$est inférieure ou égale à 10^{-n}. C'est à dire:

$-10^{-n} \leq x - a \leq 10^{-n}$ $\qquad$ $a - 10^{-n} \leq x \leq a + 10^{-n}$

$x \in [a - 10^{-n}; a + 10^{-n}]$

Exemples:

Pour $n = 2$, dire que 1,53 est une approximation du réel x à un centième près signifie que la distance de x à 1,53 est inférieure ou égale à $0{,}01 = 10^{-2}$. On a donc:

$-0{,}01 \leq x - 1{,}53 \leq 0{,}01$ $\qquad$ $1{,}52 \leq x \leq 1{,}54$ $\qquad$ $x \in [1{,}52; 1{,}54]$

Pour $n = 1$, dire que 1,1 est une approximation du réel x à un dixième près signifie que la distance de x à 1,1 est inférieure ou égale à $0{,}1 = 10^{-1}$. On a donc:

$-0{,}1 \leq x - 1{,}1 \leq 0{,}1$ $\qquad$ $1 \leq x \leq 1{,}2$ $\qquad$ $x \in [1; 1{,}2]$

Pour $n = 0$, dire que 7 est une approximation du réel x à une unité près signifie que la distance de x à 7 est inférieure ou égale à $1 = 10^{0}$. On a donc:

$-1 \leq x - 7 \leq 1$ $\qquad$ $6 \leq x \leq 8$ $\qquad$ $x \in [6; 8]$

Approximation par défaut

- Dire que $a$est une approximation du réel x à 10^{-n}près par défaut signifie que la distance de xà $a$est inférieure ou égale à 10^{-n}et que: $a \leq x$. C'est à dire:

$0 \leq x - a \leq 10^{-n}$ $\qquad$ $a \leq x \leq a + 10^{-n}$ $\qquad$ $x \in [a; a + 10^{-n}]$

Exemples:

Pour $n = 2$, dire que 1,53 est une approximation du réel x à un centième près par défaut signifie que:

$0 \leq x - 1{,}53 \leq 0{,}01$ $\qquad$ $1{,}53 \leq x \leq 1{,}54$ $\qquad$ $x \in [1{,}53; 1{,}54]$

Pour $n = 1$, dire que 1,1 est une approximation du réel xà un dixième près par défaut signifie que:

$0 \leq x - 1{,}1 \leq 0{,}1$ $\qquad$ $1{,}1 \leq x \leq 1{,}2$ $\qquad$ $x \in [1{,}1; 1{,}2]$

Pour $n = 0$, dire que 7 est une approximation du réel xà une unité près par défaut signifie que:

$0 \leq x - 7 \leq 1$ $\qquad$ $7 \leq x \leq 8$ $\qquad$ $x \in [7; 8]$

Approximation par excès

- Dire que $a$est une approximation du réel xà 10^{-n}près par excès signifie que la distance de xà $a$est inférieure ou égale à 10^{-n}et que: $a \geq x$. C'est à dire:

$-10^{-n} \leq x - a \leq 0$ $\qquad$ $a - 10^{-n} \leq x \leq 0$ $\qquad$ $x \in [a - 10^{-n}; a]$

Exemples:

Pour $n = 2$, dire que 1,53 est une approximation du réel xà un centième près par excès signifie que:

$-0{,}01 \leq x - 1{,}53 \leq 0$ $\qquad$ $1{,}52 \leq x \leq 1{,}53$ $\qquad$ $x \in [1{,}52; 1{,}53]$

Pour $n = 1$, dire que 1,1 est une approximation du réel xà un dixième près par excès signifie que:

$-0{,}1 \leq x - 1{,}1 \leq 0$ $\qquad$ $1 \leq x \leq 1{,}1$ $\qquad$ $x \in [1; 1{,}1]$

Pour $n = 0$, dire que 7 est une approximation du réel xà une unité près par excès signifie que:

$-1 \leq x - 7 \leq 0$ $\qquad$ $6 \leq x \leq 7$ $\qquad$ $x \in [6; 7]$

- Dire que $a$est un arrondi du réel xà 10^{-n}près signifie que la distance de xà $a$est inférieure ou égale à $\frac{10^{-n}}{2}$et que $x \neq a + \frac{10^{-n}}{2}$. C'est à dire:

$\frac{-10^{-n}}{2} \leq x - a < \frac{10^{-n}}{2}$ $\quad$ $a - \frac{10^{-n}}{2} \leq x < a + \frac{10^{-n}}{2}$ $\quad$ $x \in \left[a - \frac{10^{-n}}{2} ; a + \frac{10^{-n}}{2}\right[$

Exemples:

Pour $n = 2$, dire que 1,53 est un arrondi du réel xà un centième près signifie que la distance de x à 1,53 est inférieure ou égale à $\frac{0{,}01}{2} = 0{,}005$avec $x \neq 1{,}53 + 0{,}005$. On a donc:

$-0{,}005 \leq x - 1{,}53 < 0{,}005$ $\quad$ $1{,}525 \leq x < 1{,}535$ $\quad$ $x \in [1{,}525; 1{,}535[$

Pour $n = 1$, dire que 1,1 est un arrondi du réel xà un dixième près signifie que la distance de x à 1,1 est inférieure ou égale à 0,05 avec $x \neq 1{,}15$. On a donc:

$-0{,}05 \leq x - 1{,}1 < 0{,}05$ $\quad$ $1{,}05 \leq x < 1{,}15$ $\quad$ $x \in [1{,}05; 1{,}15[$

Pour $n = 0$, dire que 7 est un arrondi du réel xà une unité près signifie que la distance de x à 7 est inférieure ou égale à 0,5 avec $x \neq 7{,}5$. On a donc:

$-0{,}5 \leq x - 7 < 0{,}5$ $\quad$ $6{,}5 \leq x < 7{,}5$ $\quad$ $x \in [6{,}5; 7{,}5[$

Compléter :

- 1,35 est une approximation du réel xà un centième près.

  $< x - \quad <$ $\quad$ $< x <$ $\quad$ $x \in [\quad ; \quad]$
- 1,35 est une approximation du réel xà 0,01 près par défaut.

  .... $\leq x -$ .... $\leq$ .... $\quad$ .... $\leq x \leq$ .... $\quad$ $x \in$ [.........;.........]
- 1,35 est une approximation du réel xà 0,01 près par excès.

  .... $\leq x$ .... $\leq$ .... $\quad$ .... $\leq x \leq$ .... $\quad$ $x \subset$ [.........;.........]
- 1,35 est un arrondi du réel xà 0,01 près.

  .... $\leq x -$ .... $<$ .... $\quad$ .... $\leq x <$ .... $\quad$ $x \in$ [..........;..........[
- -3est une approximation du réel xà une unité près.

  .... $\leq x$....... $\leq$ .... $\quad$ .... $\leq x \leq$ .... $\quad$ $x \in$ [......;......]
- -3est une approximation du réel x à une unité près par défaut.

  .... $\leq x$....... $\leq$ .... $\quad$ .... $\leq x \leq$ .... $\quad$ $x \in$ [....; ....]
- -3est une approximation du réel xà une unité près par excès.

  .... $\leq x$....... $\leq$ .... $\quad$ .... $\leq x \leq$ .... $\quad$ $x \in$ [....; ....]
- -3est un arrondi du réel xà une unité près.

  .... $\leq x$....... $<$ .... $\quad$ .... $\leq x <$ .... $\quad$ $x \in$ [.........; ....[
- 1,357 est une approximation du réel xà un millième près.

  .... $\leq x -$ .... $\leq$ .... $\quad$ .... $\leq x \leq$ .... $\quad$ $x \in$ [..........;..........[
- 1,357 est une approximation du réel xà 0,001 près par défaut.

  .... $\leq x -$ .... $\leq$ .... $\quad$ .... $\leq x \leq$ .... $\quad$ $x \in$ [..........;..........[
- 1,357 est une approximation du réel xà 0,001 près par excès.

  .... $\leq x -$ .... $\leq$ .... $\quad$ .... $\leq x \leq$ .... $\quad$ $x \in$ [..........;..........[
- 1,357 est un arrondi du réel xà 0,001 près.

  .... $\leq x -$ .... $<$ .... $\quad$ .... $\leq x <$ .... $\quad$ $x \in$ [..........;..........[
- 1,35469 est une approximation du réel xà un 10^{-5}près.

- 1,35469 est un arrondi du réel xà 10^{-5}près.