Exercices étude de fonctions 1°T 2016/2017 RM

Exercice 1

-soit f une fonction définie par $f(x)=\dfrac{x+4+\sqrt{x^2+4}}{4}$

(ℓ_f) **est sa courbe représentative dans un plan rapporter au repère orthonormé** $(O,\vec{i},\vec{j})$

1.a- déterminer le domaine de définition D_f

b- calculer la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2.a- montrer que pour tout x de $]-\infty,0[$ **;** $f(x)=\dfrac{2+\dfrac{3}{x}}{1+\dfrac{4}{x}+\sqrt{1+\dfrac{4}{x^2}}}$

b- calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **et interpréter géométriquement le résultat**

3. a-montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$ **;** $\sqrt{x^2+4}+x\succ 0$

b-calculer $f'(x)$ **et donner le tableau des variations de** f

4. a-montrer que la droite d'équation $y=\dfrac{1}{2}x+1$ **est une asymptote a** (ℓ_f)

b-donner une équation cartésienne de la tangente a (ℓ_f) **au point d abscisse 0**

c- construire (ℓ_f)

Exercice 2

-soit f une fonction définie par $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x}-1}$

(ℓ_f) **est sa courbe représentative dans un plan rapporter au repère orthonormé** $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. déterminer le domaine de définition D_f

2. étudier la dérivabilité de f en $x_0=0$ **à droite**

3. étudier les variations de f

4. soit g la restriction de f sur $]1,+\infty[$

a-montrer que g admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J que l'on déterminera

b-déterminer $g^{-1}(x)$ **pour tout x de J**

c- calculer $(g^{-1})'(x)$

d-construire (ℓ_f) **et** $(\ell_{g^{-1}})$

Exercice 3

-soit f une fonction définie par $f(x)=x-1+\sqrt{x^2+3x+3}$

(ℓ_f) **Est sa courbe représentative dans un plan rapporter au repère orthonormé** $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **et** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2. montrer que la droite d'équation $y=2x+\dfrac{1}{2}$ **est une asymptote a** (ℓ_f)

3. montrer que $f'(x)=\dfrac{2x+3+2\sqrt{x^2+3x+3}}{2\sqrt{x^2+3x+3}}$ **pour tout x de** $\mathbb{R}$ **et déduire que f est strictement croissante sur** $\mathbb{R}$

4. montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J que l'on déterminera

5. déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J

6. construire (ℓ_f) et $(\ell_{f^{-1}})$

Exercice 4

-soit f une fonction définie par $f(x)=x\sqrt{1+x^2}-x^2$

(ℓ_f) Est sa courbe représentative dans un plan rapporter au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. déterminer D_f et calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et étudier les branches infinies de (ℓ_f)

3. montrer que f est dérivable et que $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=\dfrac{\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^2}{\sqrt{1+x^2}}$

4. donner l'équation cartésienne de la tangente a (ℓ_f) au point d abscisse 0

5. montrer que $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)\le x$ et interpréter géométriquement le résultat

6. construire (ℓ_f)

7. a-montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J que l'on déterminera

b-montrer que $\forall x\in J, f^{-1}(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-2x}}$

c-construire $(\ell_{f^{-1}})$

Exercice 5

-soit f une fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\left(1-2\sqrt{x}\right)^3$

(ℓ_f) Est sa courbe représentative dans un plan rapporter au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

2. calculer $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x\succ0}} \dfrac{f(x)-1}{x}$ et interpréter géométriquement le résultat

3. étudier les variations de f

4. déterminer l'équation cartésienne de la tangente (Δ) a (ℓ_f) au point d abscisse $\dfrac{1}{4}$

4. soit g la restriction de f sur $I=\left[0,\dfrac{1}{4}\right]$

a-montrer que g admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J que l'on déterminera

b-déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout x de J

Construire (ℓ_f) ; $(\ell_{g^{-1}})$ et (Δ) dans le plan rapporter au repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$

(Unité de mesure 4cm)

Exercices2 étude de fonctions 1°T 2016/2017 RM

Exercice 1

-soit f une fonction définie sur $\left[-2,+\infty\right[$ par $f(x)=x-2\sqrt{2+x}$

(ℓ_f) Est sa courbe représentative dans un plan rapporter au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2. calculer $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)+2}{x+2}$ et interpréter géométriquement le résultat

3. a-calculer $f'(x)$ et montrer que le signe de $f'(x)$ est le signe de $x+1$

b-donner le tableau des variations de f

4. montrer qu'il existe un réel α tel que $5\prec\alpha\prec 6$ et $f(\alpha)=0$

5. etudier les branches infinies de la fonction f

6. construire (ℓ_f) dans le plan rapporté au repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$

7. soit g la restriction de f sur $I=\left[-1,+\infty\right[$

a-montrer que g admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J que l'on déterminera

b-construire $(\ell_{g^{-1}})$

c-calculer $\left(g^{-1}\right)'(0)$ en fonction de α

Exercice 2

-soit f une fonction définie sur $\left]-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]$ par $f(x)=x+\sqrt{4x^2-1}$

(ℓ_f) Est sa courbe représentative dans un plan rapporter au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

2. montrer que la droite d'équation $(y=-x)$ est une asymptote a (ℓ_f)

3. a-vérifier que $\forall x\in\left]-\infty,-\dfrac{1}{2}\right[,\dfrac{f(x)-f\left(-\dfrac{1}{2}\right)}{x+\dfrac{1}{2}}=1-\sqrt{\dfrac{4x-2}{x+\dfrac{1}{2}}}$

b- étudier la dérivabilité de f en $-\dfrac{1}{2}$ à gauche

c- montrer $\forall x\in\left]-\infty,-\dfrac{1}{2}\right[,f'(x)=\dfrac{-\left(1+12x^2\right)}{\sqrt{4x^2-1\left(\sqrt{4x^2-1}-4x\right)}}$

d- donner le tableau des variations de f

4. déterminer les coordonnées de l'intersection de (ℓ_f) avec l'axe des abscisses et donner une équation de la tangente a (ℓ_f) en ce point

5. construire (ℓ_f) dans le plan rapporté au repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$

6. a-montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera

b-soit (Γ) la représentation de f^{-1} et déterminer la tangente a $(\ell_{f^{-1}})$ en 0

c- construire (Γ)

Exercice 3 -soit f une fonction définie par $f(x)=\sqrt{x^2-2x}-x+1$

(ℓ_f) Est sa courbe représentative dans un plan rapporter au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. déterminer D_f et calculer les limites de f au bornes de D_f
2. montrer que pour $x \le 0$ on a $f(x) \succ 0$ et pour $x \ge 2$ on a $f(x) \prec 0$
3. etudier la dérivabilité de f en 2 à droite et en 0 à gauche
4. a-montrer que $\forall x \in]2,+\infty[U]-\infty,0[: f'(x)=\dfrac{-f(x)}{\sqrt{x^2-2x}}$

b-donner le tableau des variations de f

5. etudier les branches infinies de la fonction f
6. construire (ℓ_f) dans le plan rapporté au repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$
7. soit g la restriction de f sur $I=[2,+\infty[$

a-montrer que g admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J que l'on déterminera

b-construire $(\ell_{g^{-1}})$

Exercice 4 -soit f une fonction définie par $f(x)=(x+1)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

(ℓ_f) Est sa courbe représentative dans un plan rapporter au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. déterminer D_f et calculer les limites de f au bornes de D_f
2. étudier la dérivabilité de f en -1 à gauche
3. a-montrer que $\forall x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[; f'(x)=\dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-1)^2\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}}$

b-donner le tableau des variations de f

5. montrer que la droite d'équation $y=x+2$ est asymptote a (ℓ_f)
6. construire (ℓ_f)

Exercice 5 -soit f une fonction définie par $f(x)=-|x-1|+\dfrac{x^2+x+2}{x+1}$

(ℓ_f) Est sa courbe représentative dans un plan rapporter au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. a-déterminer D_f et calculer les limites de f au bornes de D_f

   b-écrire $f(x)$ sans valeur absolu

2. a- étudier la dérivabilité de f et en particulier au point d'abscisse $x_0=1$

   b-étudier les variations de f et donner le tableau des variations de f

3. a-étudier les branche infini de (ℓ_f)
4. construire (ℓ_f)
5. discuter suivant les valeurs de m le nombre de solution de l'équation $f(x)=m$
6. soit g la restriction de f sur $[1,+\infty[$

a-montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} et déterminer $g^{-1}(x)$

b-construire (ℓ_g) et $(\ell_{g^{-1}})$