Etude des fonctions 2017/2018

www.0et1.com

Exercice 1 **-soit** f **une fonction définie sur** $\mathbb{R}$ **par** $\begin{cases} f(x) = x\sqrt{3-x}; x \prec 3 \\ f(x) = (x-3)\sqrt{x-3}; x \geq 3 \end{cases}$

(ℓ_f) **Est sa courbe représentative dans un plan rapporter au repère orthonormé** $(O,\vec{i},\vec{j})$

1.a- calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ **et** $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

b- etudier la continuite de f **en 3**

c- etudier la dérivabilité de f **en 3 et interpreter graphiquement les resultats**

2. a-montrer que $\begin{cases} f'(x) = \dfrac{-3x+6}{2\sqrt{x-3}}; x \prec 3 \\ f'(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x-3}, x \succ 3 \end{cases}$ **puis déduire les variations de** f

b. donner le tableau des variations de f

3. etudier les branches infinies de (ℓ_f)

4. a-montrer que $\begin{cases} f''(x) = \dfrac{3(x-4)}{4(3-x)\sqrt{3-x}}, x \prec 3 \\ f''(x) = \dfrac{3}{4\sqrt{x-3}}, x \succ 3 \end{cases}$

b. etudier la concavité de (ℓ_f)

5. construire (ℓ_f)

6- soit g la restriction de f **sur** $I = [3,+\infty[$

a. montrer que g admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J **que l'on déterminera**

b. construire $(\ell_{g^{-1}})$

c. déterminer $g^{-1}(x)$ **pour tout x de J**

7 –on concidere la suite (U_n) **definie par** $\begin{cases} U_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}; U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a-montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ **on a** $0 \prec U_n \leq 2$

b. montrer que la suite (U_n) **est croissante**

c. deduire que la suite (U_n) **est convergente puis determiner sa limite**

Exercice 2 **-soit** f **une fonction définie par** $f(x) = x\sqrt{1+x^2} - x^2$

$\left(\ell_f\right)$ **Est sa courbe représentative dans un plan rapporter au repère orthonormé** $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1. déterminer D_f **et calculer** $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)$ **et** $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)$ **et étudier les branches infinies de** $\left(\ell_f\right)$

3. montrer que f **est dérivable et que** $\forall x\in\mathbb{R}, f'\left(x\right)=\dfrac{\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^2}{\sqrt{1+x^2}}$

4. donner l'équation cartésienne de la tangente a $\left(\ell_f\right)$ **au point d abscisse 0**

5. montrer que $\forall x\in\mathbb{R}, f\left(x\right)\leq x$ **et interpréter géométriquement le résultat**

6. construire $\left(\ell_f\right)$

7. a-montrer que f **admet une fonction réciproque définie sur un intervalle** J **que l'on déterminera**

b-montrer que $\forall x\in J, f^{-1}\left(x\right)=\dfrac{x}{\sqrt{1-2x}}$

c-construire $\left(\ell_{f^{-1}}\right)$

exercice3

A. –on concidere la fonction h definie par $h\left(x\right)=3x-4x\sqrt{x}-\dfrac{1}{4}$

a- etudier les variations de h **sur** $\mathbb{R}^+$

puis donner le tableau des variations de h

b-deduire que : $\forall x\in\mathbb{R}^+, h\left(x\right)\leq 0$

B-soit f **une fonction définie sur** $\mathbb{R}^+$ **par** $f\left(x\right)=\left(4x-1\right)\sqrt{x}-4x^2+\dfrac{1}{2}$

$\left(\ell_f\right)$ **Est sa courbe représentative dans un plan rapporter au repère orthonormé** $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ **(unité 2cm)**

1-etudier la derivabilite de f **en 0 à droite ; et interpréter géométriquement le résultat**

2-a-montrer que $\forall x\in\mathbb{R}_+^*, f'\left(x\right)=\dfrac{2h\left(x\right)}{\sqrt{x}}$

b- donner le tableau des variations de f

c- etudier la branche infinie de $\left(\ell_f\right)$

6- soit g la restriction de f **sur** $\left[\dfrac{1}{4},+\infty\right[$

a. montrer que g admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J **que l'on déterminera**

b- montrer que l'equation $x\in I, g\left(x\right)=0$ **admet une solution unique α tel que** $\dfrac{1}{2}\prec\alpha\prec\dfrac{3}{4}$

b. construire $\left(\ell_f\right)$ **et** $\left(\ell_{g^{-1}}\right)$

(on admetera que la courbe admet un unique point d'inflexion d'abscisse 0.25)