Etude des fonctions

Activités

ex1-soit f **une fonction définie par** $f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

(ℓ_f) **Est sa courbe représentative dans un plan rapporter au repère orthonormé** $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. déterminer le domaine de définition D_f

2. calculer $f(2)$ **;** $f(1)$ **;** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **et** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

3. calculer $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x\succ2}} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ **et interpréter géométriquement le résultat**

4. calculer $f'(x)$ **et donner le tableau des variations de** f

5. montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \left(2x - \dfrac{5}{2}\right) = 0$ **et donner une interprétation géométrique**

Réponse

1. $f(2) = 2 - 1 + \sqrt{2^2 - 3\times2 + 2}$

$= 2 - 1 + \sqrt{4 - 6 + 2}$

$= 1$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x - 1 + \sqrt{x^2 - 3x + 2}$$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x - 1 = +\infty$

Et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2} = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

3. $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x\succ2}} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim\limits_{\substack{x\to2\\x\succ2}} \dfrac{x - 1 + \sqrt{x^2-3x+2} - 1}{x - 2}$

$$= \lim_{\substack{x\to2\\x\succ2}} \frac{x - 2 + \sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x - 2}$$

$$= \lim_{\substack{x\to2\\x\succ2}} 1 + \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x - 2}$$

$$= \lim_{\substack{x\to2\\x\succ2}} 1 + \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{(x - 2)^2}}$$

$$\lim_{\substack{x\to2\\x\succ2}} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{\substack{x\to2\\x\succ2}} 1 + \sqrt{\frac{(x-2)(x-1)}{(x - 2)^2}}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 2 \\ x \succ 2}} 1 + \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$$

$$= 1 + (+\infty)$$

$$= +\infty$$

Donc ℓ_f **admet une demie tangente verticale en 2 à droite**

4.

On a $f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

Donc $\forall x \in]2,+\infty[\qquad f'(x) = 1 + \dfrac{2x-3}{2\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$

Et on a $x \succ 2$

Donc $2x - 3 \succ 0$

Donc $\forall x \in]2,+\infty[\qquad f'(x) \succ 0$

Tableau des variations de f

x	$-+\infty$	**1**	**2**	$+\infty$
$f'(x)$	- $\quad -\infty$	‖	‖ $+\infty$	+
$f(x)$	$\frac{1}{2}$ ↘ 0	....	1 ↗	$+\infty$

5. $\lim_{x\to+\infty} f(x) - \left(2x - \frac{5}{2}\right) = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - \left(2x - \frac{5}{2}\right) = \lim_{x\to+\infty} x - 1 + \sqrt{x^2 - 3x + 2} - 2x + \frac{5}{2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 - 3x+2} - x + \frac{3}{2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 - 3x+2} - \left(x - \frac{3}{2}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x^2 - 3x + 2\right) - \left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right)}{\sqrt{x^2 - 3x+2} + x - \frac{3}{2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{x^2 - 3x+2} + \left(x - \frac{3}{2}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - \left(2x - \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{-\frac{1}{4}}{+\infty}\right) = 0$$

Donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) - \left(2x - \frac{5}{2}\right) = 0$

Donc la droite d'équation $y = 2x - \frac{5}{2}$ **est une asymptote a** ℓ_f **au voisinage de** $+\infty$

4-representetion graphique de ℓ_f

<u>Ex2</u> soit f **la fonction définie par** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}}$

1. determiner D_f

2. calculer les limites aux bornes de D_f

3. montrer que pour tout x **de** $]0,4[$ **on a** $f'(x) = \frac{x-2}{\left(4x - x^2\right)\sqrt{4x - x^2}}$

Donner le tableau des variations de f

4. construire ℓ_f

5. montrer que la droite d'équation $x = 2$ **est un axe de symétrie de** ℓ_f

<u>Réponse</u>

<u>1.</u>

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} \ / \ 4x - x^2 \succ 0\right\}$$

x	$-\infty$		**0**		**4**		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$4-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$4x - x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $D_f =]0,4[$

2. $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}} = +\infty$

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}} = +\infty$$

3. Calcul de $f'(x)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}} = \left(4x - x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\left(4x - x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\left(4 - 2x\right)$$

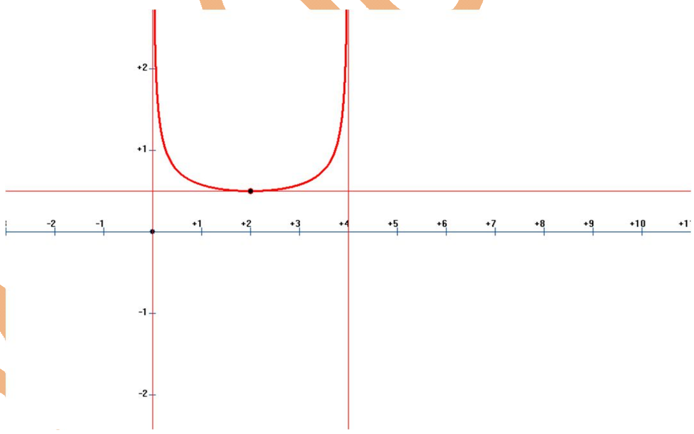
$$= \frac{x - 2}{\left(4x - x^2\right)^{\frac{2}{2}} \times \left(4x - x^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x - 2}{\left(4x - x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Donc $f'(x) = \dfrac{x - 2}{\left(4x - x^2\right)\sqrt{4x - x^2}}$

tableau des variations de f -

x	0		2		4
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$
$f(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	½	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$

4-representetion graphique de ℓ_f



5. on a

$$\forall x \in D_f \;;\quad f(4-x) = \frac{1}{\sqrt{4\,(4-x) - (4-x)^2}}$$

$$\forall x \in D_f \;;\quad f(4-x) = \frac{1}{\sqrt{16 - 4x - 16 + 8x - x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}} = f(x)$$

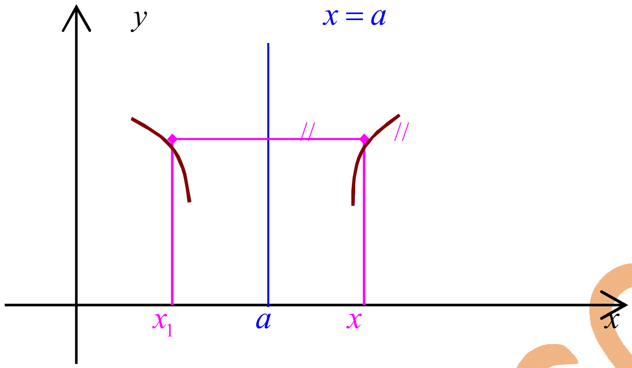
Donc la droite d équations $x = 2$ **est un axe de symétrie de** ℓ_f

Rappel

1-axe de symétrie de (ℓ_f)

On dit que la droite d'équation $D(x=a)$ **est un axe de symétrie de** (ℓ_f)

si et seulement si $\forall x \in D_f$; $2a-x \in D_f$ **et** $f(2a-x) = f(x)$



on a $x_1 + x = 2a$ **et** $f(x_1) = f(x)$

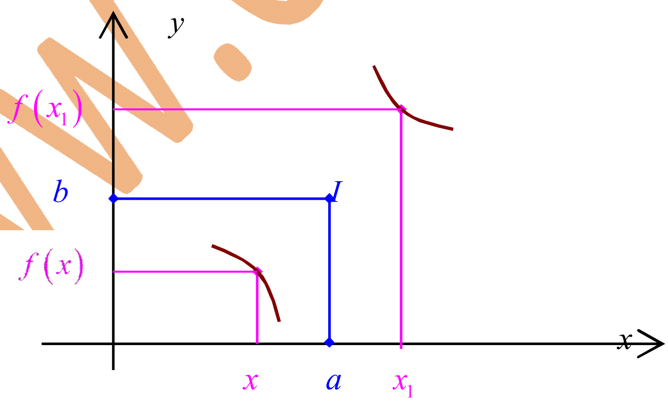
donc $x_1 = 2a - x$ **et** $f(2a-x) = f(x)$

2-centre de symétrie de (ℓ_f)

On dit que la droite d'équation $D(x=a)$ **est un axe de symétrie de** (ℓ_f)

si et seulement si $\forall x \in D_f$; $2a-x \in D_f$ **et** $f(2a-x) = 2b - f(x)$

soit $I(a,b)$ **un point du plan rapporter au repère orthonormé**



$x_1 + x = 2a$

$f(x_1) + f(x) = 2b$

$x_1 = 2a - x$

$f(x_1) = 2b - f(x)$

$f(2a-x) = 2b - f(x)$**:**

Propriété

Le point $I(a,b)$ **est un centre de symétrie de** ℓ_f **si et seulement si**

$\forall x \in D_f$; $2a-x \in D_f$ **et** $\forall x \in D_f$; $f(2a-x) = 2b - f(x)$ **.**

Résumé

1/ Dérivabilité et la monotonie

Soit   une fonction dérivable sur

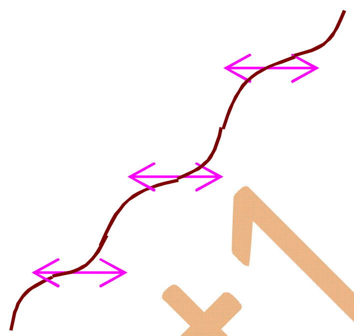
*****si pour tout x de I on a $f'(x)=0$ alors f est fonction constante sur I**

*****si pour tout x de I on a $f'(x)\succ 0$ alors f est fonction strictement croissante sur I**

(peut s'annuler en un nombre fini de points)

*****si pour tout x de I on a $f'(x)\prec 0$ alors f est fonction strictement décroissante sur I**

(peut s'annuler en un nombre fini de points)



2/extremums

*****soit $x_0 \in I$ et $I \subset D_f$**

On dit que $f(x_0)$ est un maximum de f sur I si et seulement si

$\forall x \in I \;;\quad f(x) \leq f(x_0)$

On dit que $f(x_0)$ est un minimum de f sur I si et seulement si

$\forall x \in I \;;\quad f(x) \geq f(x_0)$

*****si f est dérivable sur $I=[a,b]$ et $x_0 \in I$**

Si $\forall x \in [a,x_0[\;;\; f'(x_0) \succ 0$ et $\forall x \in]x_0,b] \;;\; f'(x_0) \prec 0$ et $f'(x_0) = 0$

Alors $f(x_0)$ est un maximum de f sur I

x	a		x_0		b
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	$f(x_0)$	↘	

***si f **est dérivable sur** $I=[a,b]$ **et** $x_0 \in I$

Si $\forall x \in [a,x_0[\; ; \; f'(x_0) \prec 0$ **et** $\forall x \in]x_0,b] \; ; \; f'(x_0) \succ 0$ **et** $f'(x_0) = 0$

Alors $f(x_0)$ **est un minimum de** f **sur** I

Propriété

soit f **une fonction dérivable sur un intervalle** I **de centre** x_0

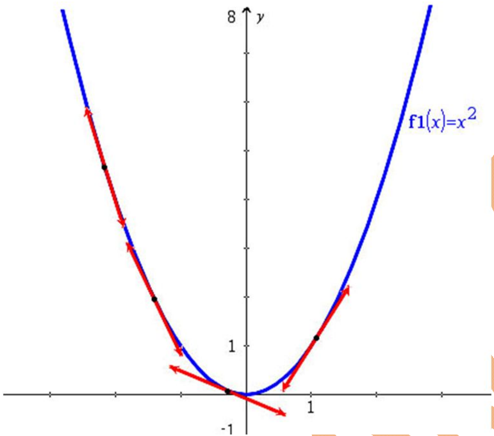
$f(x_0)$ **est extremum si et seulement si** f' **s'annule en** x_0 **en changeant le signe**

3/concavité et point d'inflexion

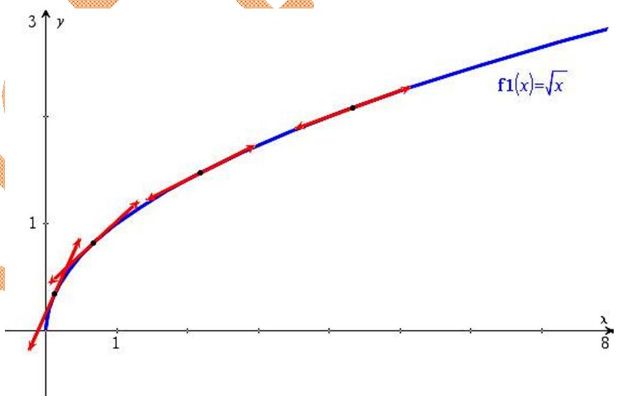
Soit f **une fonction dérivable sur un intervalle** I **et** (ℓ_f) **sa représentation dans un repère orthonormé**

*** **on dit que** (ℓ_f) **est concave si et seulement si** (ℓ_f) **se trouve au-dessous de tous ses tangente**

*** **on dit que** (ℓ_f) **est convexe si et seulement si** (ℓ_f) **se trouve au-dessus de tous ses tangente**



convexe



Concave

Propriété

Soit f **une fonction deux fois dérivable sur** I **et sa représentation graphique**

***si $\forall x \in I; f''(x) \succ 0$ **alors** (ℓ_f) **est convexe**

***si $\forall x \in I; f''(x) \prec 0$ **alors** (ℓ_f) **est concave**

***si f'' **s'annule en** x_0 ; $x_0 \in I$ **en changeant de signe alors le point** $I\,(x_0\,,f(x_0))$

est un point d'inflexion de

4/branche infinie

Soit ℓ_f **la représentation graphique de la fonction** f

$$\ell_f = \{M(x\,,f(x)) \;\; / \;\; x \in D_f\}$$

On dit que (ℓ_f) **admet une branche infinie si et seulement si** x **ou** $f(x)$ **tend vers** ∞

1/Asymptotes parallèles à l'axe des ordonnées

Si $\left|\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\right| = +\infty$ ou $\left|\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\right| = +\infty$

Alors la droite d'équation $(x = x_0)$ est asymptote verticale à C_f.

2/Asymptotes parallèles à l'axe des abscisses

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ avec l réel (ou en $-\infty$)

Alors la droite d'équation $y = l$ est asymptote horizontale à C_f en $+\infty$ (resp. en $-\infty$).

3/Asymptotes oblique

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ avec a et b réels (ou en $-\infty$)

Alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à C_f en $+\infty$ (resp. en $-\infty$).

4/Asymptotes oblique

Si $f(x) = ax + b + h(x)$ avec a et b réels et $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = 0$

Alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à C_f en $+\infty$ (resp. en $-\infty$).

5/Asymptotes oblique

Si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - ax = b$ avec $b \in \mathbb{R}$

Alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à C_f en $+\infty$ (resp. en $-\infty$).

6/les directions asymptotiques

a/ branches paraboliques $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$

1-si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$ **alors** (ℓ_f) **admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de l'infini**

2- si $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ **alors** (ℓ_f) **admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au Voisinage de l'infini**

3- si $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ **avec** $a \in \mathbb{R}^*$ et $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - ax = \infty$ **alors** (ℓ_f) **admet une branche parabolique de direction l'axe d'équation** $(y = ax)$ au **voisinage de l'infini**

b/ asymptote oblique et branches paraboliques