LA DÉRIVABILITÉ

1) la dérivabilité en un point

1/ activités

1- déterminer le nombre dérivé de la fonction f en x_0

a- $f(x)=\frac{1}{x^2}$ $x_0=1$

On a ; $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x^2}-1}{x-1}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{x^2(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(1+x)}{x^2(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-(1+x)}{x^2}$$

$$=-2$$

Donc le nombre dérivé de la fonction f en $x_0=1$ est -2

Et on écrit $f'(1)=-2$

b- $f(x)=\sqrt{x}$ $x_0=2$

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$

$=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

Donc f est dérivable en $x_0=2$

Et le nombre dérivé de la fonction f en $x_0=2$ est $f'(2)=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

2- étudier la dérivabilité de la fonction f en x_0 dans les cas suivant

a- $x_0=1$ $f(x)=|x^2-3x+2|$

On a $f(x)=\begin{cases}x^2-3x+2 & x\prec 1 \text{ أو } x\succ 2\\ -x^2+3x-2 & 1\le x\le 2\end{cases}$

On a $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ 1\prec x}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\succ 1}}\frac{-x^2+3x-2}{x-1}$

$=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\succ 1}}\frac{-(x-1)(x-2)}{x-1}$

$=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\succ 1}}-(x-2)$

$=1$

Donc $f'_d(1)=1$

www.0et1.com

On a $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\prec 1}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\prec 1}} \dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$

$= \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\prec 1}} x-2 = -1$

Donc $f'_g(1)=-1$

Donc $f'_d(1) \neq f'_g(1)$

Donc la fonction n'est pas dérivable en 1

b- $f(x) = \begin{cases} \tan x & ; \quad 0 \prec x \prec \dfrac{\pi}{2} \\ \sin x & ; \quad \dfrac{-\pi}{2} \prec x \leq 0 \end{cases}$ $\qquad x_0 = 0$

On a $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\tan x}{x} = 1$

Et $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

Donc $f'_d(0) = f'_g(0) = 1$

donc f **Est dérivable en** $x_0 = 0$

Et on a $f'(0)=1$

c- $x_0 = 0$ $\qquad f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; \quad x \geq 1 \\ x+1 & ; \quad x \prec 1 \end{cases}$

on a $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\prec 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\prec 1}} x+1 = 2$ $\qquad$ **Et** $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\succ 1}} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \sqrt{x} = 1$

Donc la fonction n'est pas continue en $x_0 = 1$ **donc non dérivable en 1**

3/ déterminer l'équation de la tangente a la courbe (ℓ_f) **au point d abscisse** x_0

a- $x_0 = 0$ $\qquad f(x) = \sqrt{x^3+1}$

On a $f(0)=1$

Et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^3+1}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3+1-1}{x\left(\sqrt{x^3+1}+1\right)}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\left(\sqrt{x^3+1}+1\right)}$

$= 0 = f'(0)$

donc l'équation de la tangente a (ℓ_f) **en 1 est** $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

Cad $y = 1$

b- $x_0 = 1$ $\qquad f(x) = \sqrt[3]{x}$

On a $f(1)=1$

www.0et1.com

Donc $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\left(\sqrt[3]{x} - 1\right)\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} = \frac{1}{3} \qquad \textbf{Donc } f'(1) = \frac{1}{3}$$

donc l'équation de la tangente a (ℓ_f) **en 0 est** $y = \dfrac{1}{3}(x-1) + 1$

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

Résumée

1 - la derivabilite en un point

Soit f **une fonction dont le domaine de définition** D_f **contient un intervalle ouvert de centre** x_0

On dit que la fonction f **est dérivable en** x_0 **si et seulement si**

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in \mathbb{R}$$

Et on écrit $f'(x_0) = l$

Le nombre $f'(x_0)$ **s'appelle le nombre dérivé de la fonction** f **en** x_0

2 - la derivabilite a droite en un point

Soit f **une fonction dont le domaine de définition** D_f **contient un intervalle de la forme** $[x_0 \ , \ x_0 + \alpha[$ **tel que** $\alpha \succ 0$

On dit que la fonction f **est dérivable à droite en** x_0 **si et seulement si.**

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x_0 \prec x}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in \mathbb{R}$$

Et on écrit $f'_d(x_0) = l$

Le nombre $f'_d(x_0)$ **s'appelle le nombre dérivé à droite de la fonction** f **en** x_0.

2 - la derivabilite a gauche en un point

Soit f **une fonction dont le domaine de définition** D_f **contient un intervalle de la forme** $]x_0 - \alpha \ , \ x_0]$ **tel que** $\alpha \succ 0$

On dit que la fonction f **est dérivable à gauche en** x_0 **si et seulement si.**

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x_0 \succ x}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in \mathbb{R}$$

Et on écrit $f'_g(x_0) = l$

Le nombre $f'_g(x_0)$ **s'appelle le nombre dérivé à gauche de la fonction** f **en** x_0.

Propriété

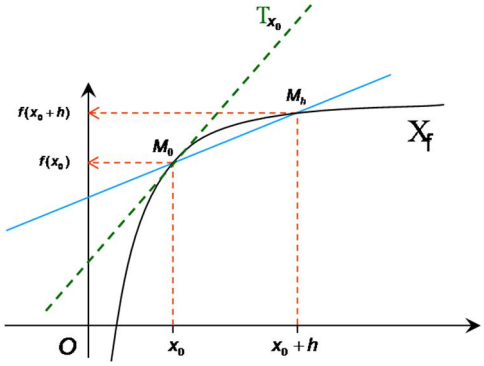
www.0et1.com

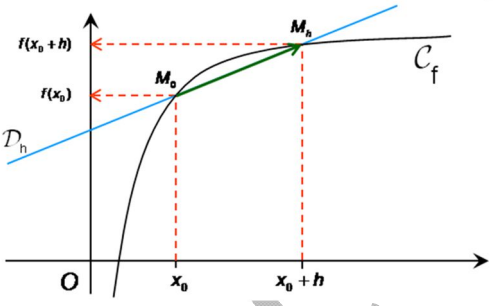
On dit que la fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si elle est dérivable en à droite et à gauche en x_0 et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$

1-interpretation géométrique

Soit (ℓ_f) la courbe représentatif de la fonction f dans le plan rapporter au repère orthonormé

On considère les points $M_h(x_0+h, f(x_0+h)$.$M_0(x_0, f(x_0))$





On a $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ est la pente de la droite (M_hM_0)

Quand le point M_h se rapproche du point M_0

La droite (M_hM_0) se rapproche de la droite (Δ)

donc la pente de (Δ) Est $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$

donc l'équation de la tangente (Δ) Est $y = f'(x_0)x + p$

On a $M_0(x_0, f(x_0)) \in (\Delta)$

Donc $f(x_0) = f'(x_0)x_0 + p$

Donc $p = f(x_0) - f'(x_0)x_0$

D ou $y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0$ **donc** $\boxed{y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)}$

Est l'équation de la tangente a (ℓ_f) au point $M_0(x_0, f(x_0))$

Le demi tangent a (ℓ_f)

si f est x_0 À droite l'équation de la demi tangente est $\begin{cases} y = f'_d(x_0)(x-x_0) + f(x_0) \\ x \geq x_0 \end{cases}$

dérivable en

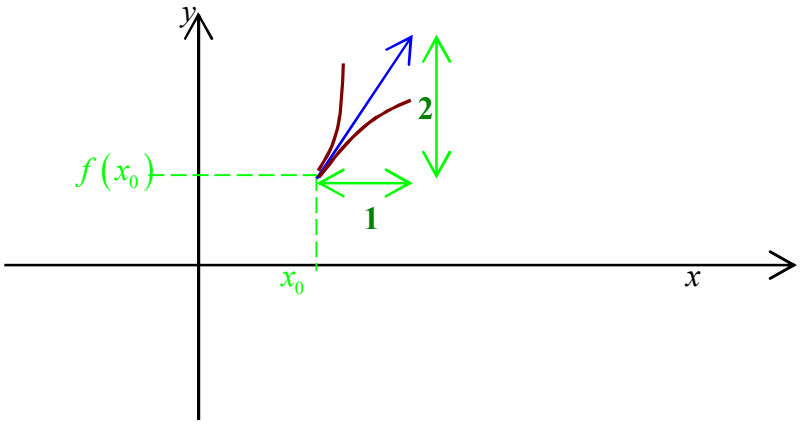
si f est x_0 à gauche l'équation de la demi tangente est $\begin{cases} y = f'_g(x_0)(x-x_0) + f(x_0) \\ x \leq x_0 \end{cases}$

dérivable en

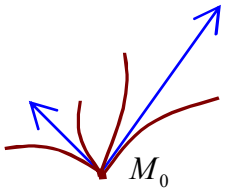
www.0et1.ma

Exemple

1- $f'_d(x_0)=2$ و $f(x_0)=1$



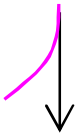
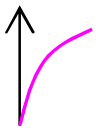
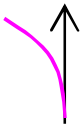
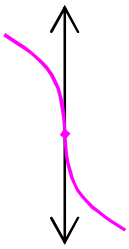
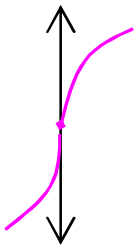
2- $f'_g(x_0)=-1$ $f'_d(x_0)=2$



Demie tangente verticale (parallèle à l'axe des abscisses)

si on a $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\pm\infty$ **Ou** $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\pm\infty$

Alors (ℓ_f) **admet une demi-tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d abscisse** x_0

$\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$ 	$\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$ 
$\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty$ 	$\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty$ 	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$ 

www.net1.com

1// La fonction dérivé

1- $f(x)=(x^2+1)\sqrt{x}$

2- $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

3- $f(x)=|x^2-1|$

4- $f(x)=\tan^5(x)$

Correction

1- on a $f'(x) = \left[(x^2+1)\sqrt{x}\right]'$

$= (x^2+1)'\sqrt{x} + (x^2+1)(\sqrt{x})'$

$= 2x\sqrt{x} + (x^2+1)\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \qquad = 2x\sqrt{x} + \dfrac{(x^2+1)\sqrt{x}}{2x}$

2 - $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

Donc $f'(x) = \dfrac{x'(x^2+1) - x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \qquad = \dfrac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} \qquad = \dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$

3 - $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & ; \quad x \prec -1 \text{ أو } x \succ 1 \\ 1-x^2 & ; \quad -1 \le x \le 1 \end{cases}$

Donc $f'(x) = \begin{cases} 2x & ; \quad x \prec -1 \text{ أو } x \succ 1 \\ -2x & ; \quad -1 \le x \le 1 \end{cases}$

4 - $f(x)=\tan^5(x)$

$f'(x) = 5\tan^4(x)\,(\tan(x))'$

$= 5\tan^4 x\,(1+\tan^2(x))$

$= \dfrac{5\tan^4 x}{\cos^2(x)}$

Résumée

$$(u\cdot v)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(ku)' = k\cdot u' \;/\; k\in\mathbb{R}$$

$$(u^n)' = nu^{n-1}\cdot u' \;/\; n\in\mathbb{N}$$

www.0et1.com

Tableau des dérivées de fonctions usuelles

ملاحظـات	الدالـة f'	الدالـة f
$a \in \mathbb{R}$	0	a
	a	$ax+b$
	1	x
$n \in \mathbb{N}^*$	$n \cdot x^{n-1}$	x^n
$x \neq 0$	$\frac{-1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$
$x \succ 0$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$
$x \neq \frac{-d}{c}$	$\frac{ad-bc}{(cx+d)'}$	$\frac{ax+b}{cx+d}$
	$-\sin x$	$\cos(x)$
	$\cos x$	$\sin(x)$
	$-a\sin(ax+b)$	$\cos(ax+b)$
	$a\cos(ax+b)$	$\sin(ax+b)$
$x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$	$1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$
	$af'(ax+b)$	$f(ax+b)$

La dérivabilité sur un intervalle

. On dit que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I
Si seulement si elle est dérivable en tout point de I

Les dérivées successives

Si la fonction f est dérivable sur l'intervalle I la fonction dérivé est définie sur
Et si la fonction dérivé f' est dérivable sur I on appelle sa dérivée la dérivée second de f
Et on la note f'' ou $f^{(2)}$
Et en général $f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$

Remarque

Si la fonction $f^{(n)}$ existe et définie sur I alors la fonction f est dérivable fois sur I

2) approximation local d'une fonction par une fonction affine

Exemple $f(x)=(1+2x)^3$

On a $f'(x) = 3(1+2x)^2 \cdot 2$

$= 6\,(1+2x)^2$

www.9et1.com

Donc $f'(0) = 6$

Et on a $f(0) = 1$

On a $f(x) = 1 + 3(2x) + 3(2x)^2 + (2x)^3$

$= 1 + 6x + 12x^2 + 8x^3$

$= 1 + 6x + x(12x + 8x^2)$

$= f(0) + f'(0)(x-0) + (x-0)(12x + 8x^2)$

On remarque que $\lim\limits_{x\to 0} 12x + 8x^2 = 0$

Donc si x **et très proche de 0 la valeur de** $12x + 8x^2$ **est négligeable**
Donc au voisinage de 0 $(x) \simeq 1 + 6x$

On pose $u(x) = 1 + 6x$

La fonction u **s'appelle la fonction affine tangente a** f **en** $x_0 = 0$

Propriété et définition

Soit f **une fonction définie sur un intervalle** (I) **ouvert centre en** x_0

On dit que la fonction est dérivable en si et seulement si il existe une fonction définie sur (I)

tel que . $\forall x \in I \quad f(x) = ax + b + \varphi(x)(x - x_0) \;/\; (a,b) \in \mathbb{R}^2$ **Avec** $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$

La fonction u **définie sur** $\mathbb{R}$ **par** $u(x) = ax + b$
$u(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Est appelée la fonction affine tangente a f **en** x_0

Remarque

La courbe représentatif de la fonction u **est la tangente a** (ℓ_f) **au point d abscisses** x_0

2) la dérivée de la fonction réciproque

1-derivee du composée -1

On a $f'(x) = \dfrac{d\,f(x)}{dx}$

Donc $fog(x) = \dfrac{d\,(fog(x))}{dx}$

On pose $g(x) = y$

Donc $fog(x) = \dfrac{d\,f(y)}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx}$

$= \dfrac{d\,(f(y))}{dy} \cdot \dfrac{d(g(x))}{dx}$

$= f'(y) \cdot g'(x)$

$= f'(g(x)) \times g'(x)$

Donc

$(fog)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$
$(gof)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$

www.0et1.com

Propriété

Soit f **une fonction définie sur un intervalle** I **.** $x_0 \in I$

et g **une fonction définie sur** J **tel que** $f(I) \subset J$

..Si f **est dérivable en** x_0 **et** g **est dérivable en** $f(x_0) = y_0$ **alors** gof **est dérivable en** x_0

Et on a $(gof)'(x_0) = g'(f(x_0)) \times f'(x_0)$

Si f **est dérivable sur** I **et** g **est dérivable sur** J **et** $f(I) \subset J$ J

.. Alors gof **est dérivable sur** I

Et on a $\forall x \in I \quad ; \quad (gof)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$

Applications

Calculer la dérivée des fonctions suivante

1- $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ **-1**

$\forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad f'(x) = \cos'\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) \times \left(2x + \frac{\pi}{2}\right)'$

$= -2\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

2- $f(x) = \cos(ax+b) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\cos'(ax+b) \cdot (ax+b)'$

$= -a \sin(ax+b)$

3- $g(x) = f(ax+b)$

$g'(x) = f'(ax+b) \cdot (ax+b)'$

$= a \cdot f'(ax+b)$

4- $f(x) = \sqrt{v(x)}$

On pose $u(x) = \sqrt{x}$

Donc $f(x) = uov(x)$

On a $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Donc $f'(x) = u'(v(x)) \times v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{v(x)}} \times v'(x) = \frac{v'(x)}{2\sqrt{v(x)}}$

La dérivée de la fonction réciproque

Introduction

Soit f **une fonction continue monotone sur** I **et** $f(I) = J$

f **Admet une fonction réciproque** f^{-1} **définie sur** $f(I) = J$

Si f **est dérivable sur** I **et** f^{-1} **est dérivable sur** $f(I) = J$

Alors $\forall x \in J \quad ; \quad (f\, o\, f^{-1})'(x) = 1$

Donc $f'(f^{-1}(x))' \times (f^{(-1)})'(x) = 1$

www.0et1.com

Et en déduit que $\forall x \in J \quad ; \left(f^{(-1)}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$

Remarque

$$x_0 = f^{-1}(y_0) \quad ; \quad f(x_0) = y_0$$

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Propriété

Soit f **une fonction continue monotone sur l'intervalle** I

Si la fonction f **est dérivable en** x_0 **et** $f'(x_0) \neq 0$ **.** $x_0 \in I$

Alors f^{-1} **est dérivable en** $y_0 = f(x_0)$ **et** $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

Si la fonction f **est dérivable sur l'intervalle** I **et** $\forall x \in I; f'(x) \neq 0$ **.**

Alors f^{-1} **est dérivable sur** $f(I) = J$ **et pour tout x de** J **;** $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$

Application

La dérive de la racine n nième

On considère la fonction f **définie sur** $\mathbb{R}^+$ **par** $f(x) = x^n$

$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$

$f'(x) = n\,x^{n-1}$

On a $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \dfrac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}$

Donc $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x}^{\,n-1}}$

Remarque

$$\forall x \in \mathbb{R}^{*+} \qquad \left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{n\,x^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n}\,x^{\frac{1}{n}-1}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^{*+} \left(\sqrt[n]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n}\,x^{\frac{1}{n}-1}$$

www.0et1.com

Exemple

1- $f(x) = \sqrt{x}$

$= x^{\frac{1}{2}}$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad ; \quad f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{-1}{2}}$

$= \frac{1}{2\,x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

2- $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad ; \quad f'(x) = \frac{1}{3}\, x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}\, x^{\frac{-2}{3}}$

$= \frac{1}{3\,x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

En général

1- $\forall r \in \mathbb{Q}^*$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad (x^r)' = r\,x^{r-1}$

2-si est dérivable sur I

Et pour tout x de I **;** $f(x) \succ 0$

$r \in \mathbb{Q}; (f^r)' = r\,f^{r-1}(x) \times f'(x)$

Exemple

$f(x) = \sqrt[3]{(x^2+1)^2}$ **-1**

$= (x^2+1)^{\frac{2}{3}}$

$f'(x) = \frac{2}{3}\,(x^2+1)^{\frac{2}{3}-1} \cdot (2x)$

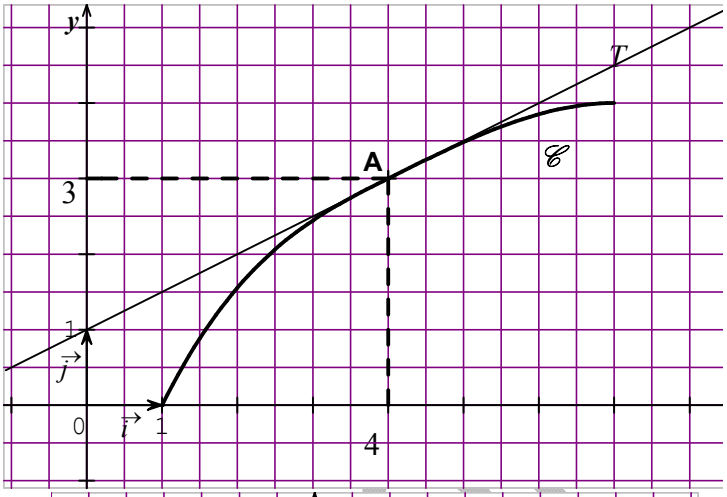
$= \frac{4\,x}{3\,(x^2+1)^{\frac{1}{3}}}$

www.0et1.com

Exercices sur le nombre dérivé

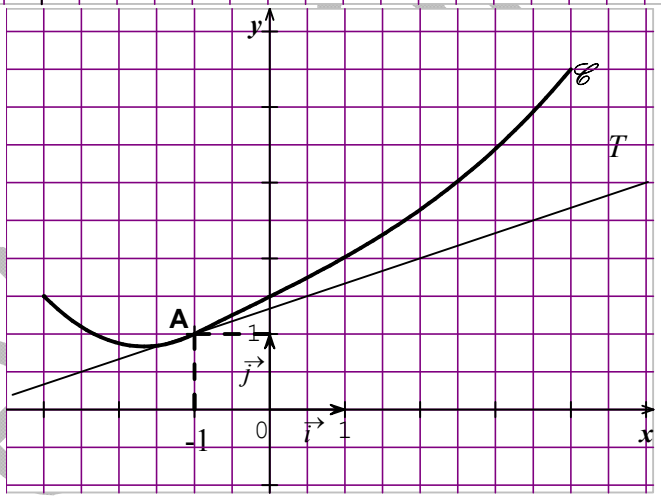
1 La courbe $\mathscr{C}$ ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f et la droite T est la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 4.

1°) Déterminer graphiquement la valeur de l'image de 4 par f.
2°) Déterminer graphiquement le coefficient directeur de T ; en déduire la valeur du nombre dérivé de f en 4.



2 La courbe $\mathscr{C}$ ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f et la droite T est la tangente à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse -1.

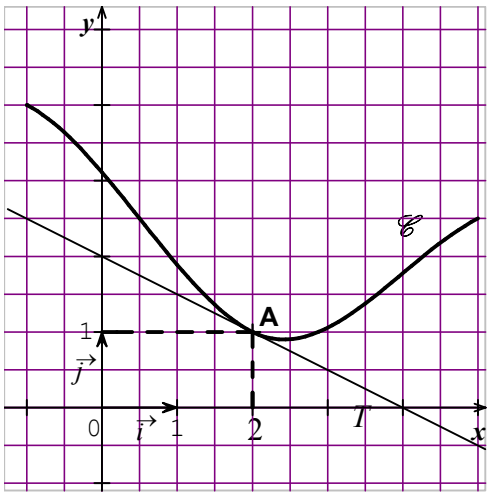
1°) Déterminer graphiquement la valeur de l'image de – 1 par f.
2°) Déterminer graphiquement le coefficient directeur de T ; en déduire la valeur du nombre dérivé de f en – 1.



3 La courbe $\mathscr{C}$ ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f et la droite T est la tangente à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 2.

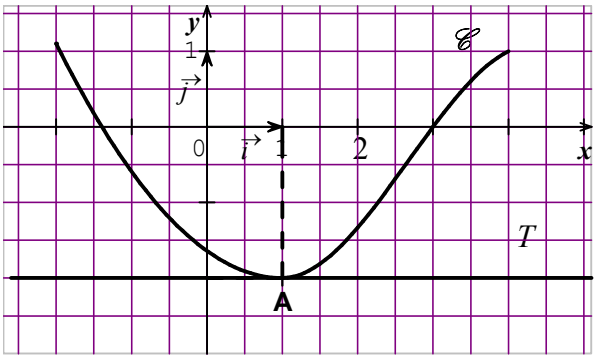
1°) Déterminer graphiquement la valeur de l'image de 2 par f.

2°) Déterminer graphiquement le coefficient directeur de T ; en déduire la valeur du nombre dérivé de f en 2.



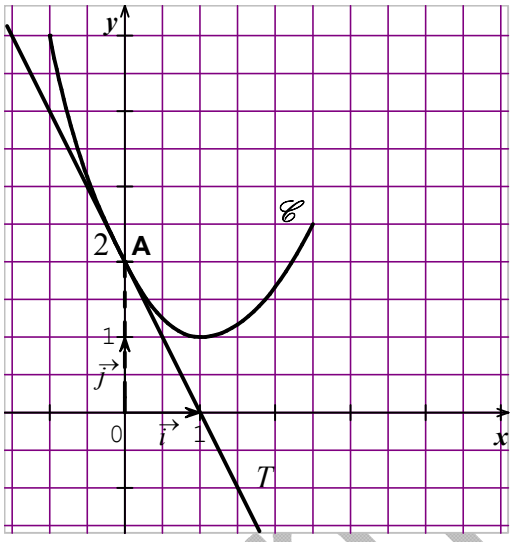
4 La courbe $\mathscr{C}$ ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f et la droite T est la tangente à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 1.

Déterminer graphiquement :
- la valeur de l'image de 1 par f ;
- la valeur du nombre dérivé de f en 1.



www.Ob

5 La courbe $\mathscr{C}$ ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f dérivable en 0 et la droite T est la tangente à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 0.



Déterminer graphiquement
- la valeur de l'image de 0 par f ;
- la valeur du nombre dérivé de f en 0.

www.0et1.com