# ENSEMBLES DE NOMBRES

## Définitions et notations

1. Nombres entiers naturels

Un nombre entier naturel est un nombre entier qui est positif.
L'ensemble des **nombres entiers naturels** est noté $\mathbb{N}$**.**

$\mathbb{N} = \{0\,;1\,;2\,;3\,;4...\}$.

Exemples :

$4 \in \mathbb{N}$

$-2 \notin \mathbb{N}$

2. Nombres entiers relatifs

Un nombre entier relatif est un nombre entier qui est positif ou négatif.
L'ensemble des **nombres entiers relatifs** est noté $\mathbb{Z}$.

$\mathbb{Z} = \{...-3\,;-2\,;-1\,;0\,;1\,;2\,;3\,...\}$.

Exemples :

$-2 \in \mathbb{Z}$

$5 \in \mathbb{Z}$

$0{,}33 \notin \mathbb{Z}$

3. Nombres décimaux

Un nombre décimal peut s'écrire avec un nombre fini de chiffres après la virgule.
L'ensemble des **nombres décimaux** est noté $\mathbb{D}$**.**

Exemples :

$0{,}56 \in \mathbb{D}$

$3 \in \mathbb{D}$

$\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$ mais $\frac{3}{4} \in \mathbb{D}$

4. Nombres rationnels

Un nombre rationnel peut s'écrire sous la forme d'un quotient $\frac{a}{b}$ avec $a$ un entier et $b$ un entier non nul.

L'ensemble des **nombres rationnels** est noté $\mathbb{Q}$**.**

Exemples :

$\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$

$4 \in \mathbb{Q}$

$-4{,}8 \in \mathbb{Q}$

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

5. Nombres réels

L'ensemble des **nombres réels** est noté $\mathbb{R}$.
C'est l'ensemble de tous les nombres que nous utiliserons en classe de seconde.

Exemples :

2, 0, -5, 0.67, $\frac{1}{3}$, $\sqrt{3}$ ou $\pi$ appartiennent à $\mathbb{R}$.

6. Ensemble vide

Un ensemble qui ne contient pas de nombre s'appelle l'**ensemble vide** et se note $\varnothing$.

7. Symbole d'exclusion

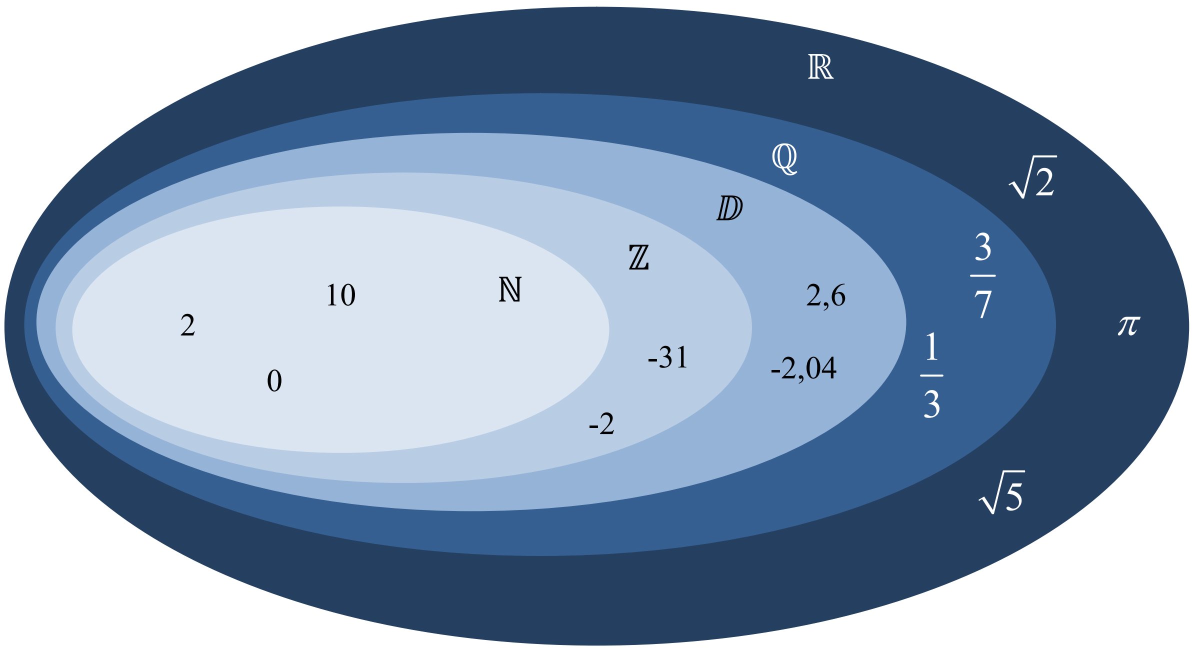
Le signe * exclu le nombre 0 d'un ensemble.
Par exemple, $\mathbb{R}$ * est l'ensemble des nombres réels privé de 0.

8. Inclusions

Tous les nombres de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ appartiennent à l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$.
On dit que l'ensemble $\mathbb{N}$ est inclus dans l'ensemble $\mathbb{Z}$.
On note : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

On a également les inclusions suivantes :

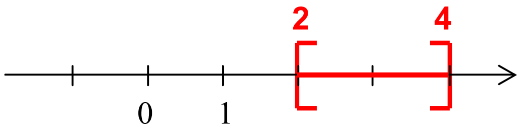
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$



# Intervalles de ℝ

1. <u>Notations :</u>

L'ensemble de tous les nombres réels $x$ tels que $2 \le x \le 4$ peut se représenter sur une droite graduée.




Cet ensemble est appelé un intervalle et se note : [ 2 ; 4 ]

*En latin, « intervallum » désignait la distance entre deux pieux.*

<u>Exemple :</u>

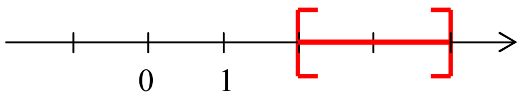
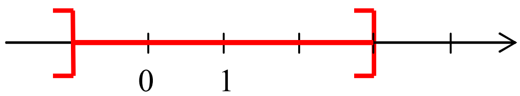
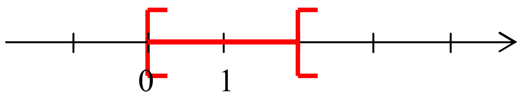
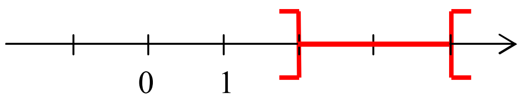
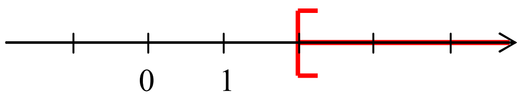
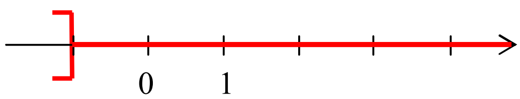
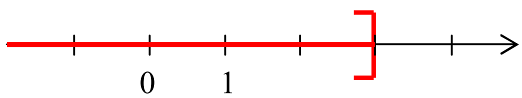
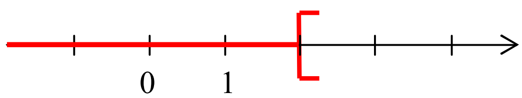
L'ensemble de tous les nombres réels $x$ tels que $-2 \le x \le 7$ se note : [-2 ; 7].

On a par exemple :

$4 \in [-2 ; 7]$

$-1 \in [-2 ; 7]$

$8 \notin [-2 ; 7]$

| Nombres réels $x$ | Notation | Représentation |
|---|---|---|
| $2 \le x \le 4$ | [ 2 ; 4 ] |  |
| $-1 < x \le 3$ | ] -1 ; 3 ] |  |
| $0 \le x < 2$ | [ 0 ; 2 [ |  |
| $2 < x < 4$ | ] 2 ; 4 [ |  |
| $x \ge 2$ | [ 2 ; +∞ [<br><br>∞ désigne l'infini |  |
| $x > -1$ | ] -1 ; +∞ [ |  |
| $x \le 3$ | ] -∞ ; 3 ] |  |
| $x < 2$ | ] -∞ ; 2 [ |  |

Remarque :
L'ensemble des nombres réels ℝ est un intervalle qui peut se noter ] -∞ ; +∞ [.

Méthode : Donner les solutions d'une inéquation

Résoudre l'inéquation et donner les solutions sous forme d'un intervalle : $2x-3<4$

$$2x-3<4$$
$$2x<4+3$$
$$2x<7$$
$$x<\frac{7}{2}$$

L'ensemble des solutions est l'intervalle $\left]-\infty;\frac{7}{2}\right[$.

2. Intervalle ouvert et intervalle fermé :

Définitions :
On dit qu'un intervalle est fermé si ses extrémités appartiennent à l'intervalle.
On dit qu'il ouvert dans le cas contraire.

Exemples :

- L'intervalle [-2 ; 5] est un intervalle fermé.

On a : -2 ∈ [-2 ; 5] et 5 ∈ [-2 ; 5]

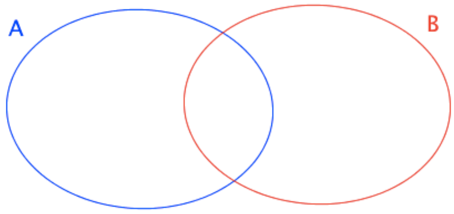
- L'intervalle ]2 ; 6[ est un intervalle ouvert.

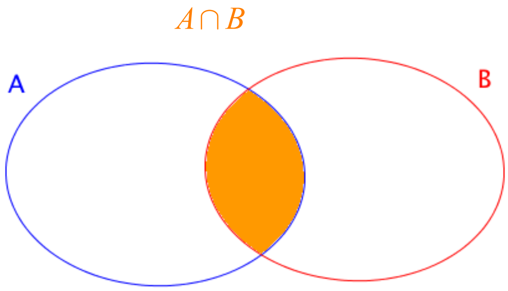
On a : 2 ∉ ]2 ; 6[ et 6 ∉ ]2 ; 6[

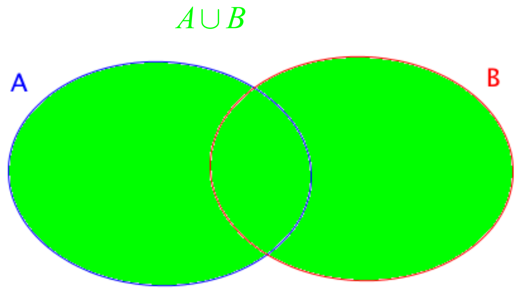
- L'intervalle $]6;+\infty[$ est également un intervalle ouvert.

3. Intersections et unions d'intervalles :

Définitions :
- L'intersection de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **et** à B et se note **A∩B**.
- La réunion de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **ou** à B et se note **A∪B.**



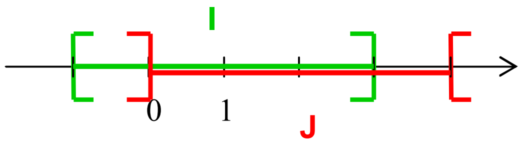




Méthode : Déterminer l'intersection et la réunion d'intervalle

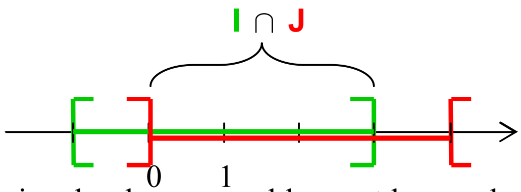
Dans les cas suivants, déterminer l'intersection et la réunion des intervalles I et J :

1) I =[-1 ; 3] et J = ]0 ; 4[ 2) I = ] -∞ ; -1] et J = [1 ; 4]

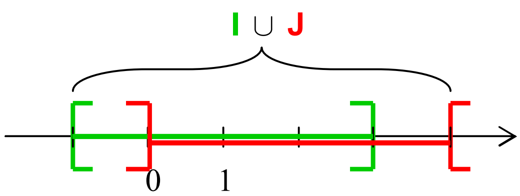
1) Pour visualiser les ensembles solutions, on peut représenter les intervalles **I** et **J** sur un même axe gradué.



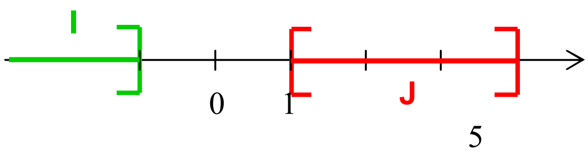

Les nombres de l'intersection des deux ensembles sont les nombres qui appartiennent à la fois aux deux ensembles. Il s'agit donc de la zone de l'axe gradué où les deux ensembles se superposent. Ainsi I ∩ J = ]0 ; 3].




Les nombres de la réunion des deux ensembles sont les nombres qui appartiennent au moins à l'un des deux ensembles. Il s'agit donc de la zone de l'axe gradué marquée soit par l'intervalle I soit par l'intervalle J. Ainsi I ∪ J = [-1 ; 4[.




2)



I ∩ J = ∅, car les ensembles I et J n'ont pas de zone en commun.
I ∪ J = ] -∞ ; -1] ∪ [1 ; 4]

Exercice 1

1) Effectuer : $A = \frac{11}{5} - \frac{3}{4}$ $\quad B = \frac{5}{3} - \frac{4}{3} \times \frac{6}{7}$ $\quad C = \frac{5^{-1} \times \left(5^3\right)^3}{5 \times 5^2}$

$D = \left(1 - \sqrt{6}\right)\left(1 + \sqrt{6}\right)$ $\quad E = \left(\sqrt{3} - 1\right)^2$ $\quad F = \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^2$

$G = 7\sqrt{3} - 2\sqrt{12} + 3\sqrt{27}$ $\quad H = \sqrt{18} - \sqrt{2} - 2\sqrt{20}$

2) Déterminer la nature de chacun des nombres précédents.

Exercice 2

Dans chaque cas, écrire les inégalités sous forme d'un intervalle.

a) $2 \leq x \leq 7$ b) $-2 \leq x < 0$ c) $-2 < x \leq 6$ d) $x \leq 9$

e) $2 > x$ f) $9 < x < 11$ g) $-9 < x$ h) $13 \geq x$

Exercice 3

Résoudre chacune des inéquations suivantes et donner le résultat sous forme d'un intervalle.

a) $3x - 4 < 8$ b) $9x - 5 > 5x - 1$ c) $6x - 7 \leq 7x + 5$

d) $5(2x - 3) \geq -5x + 3$ e) $-(x - 4) < 2x$ f) $-4(x + 5) \leq 7 - 2x$

g) $5x - 1 > -4(x + 1)$ h) $-7(x - 6) \leq -8x + 4$

Exercice 4

1) Inventer une inéquation du type $ax + b \leq cx + d$ (avec *a*, *b*, *c* et *d* réels non nuls) dont la solution est l'intervalle $]-\infty; 2]$.

2) Même question avec l'intervalle $]5; +\infty[$.

Exercice 5

Dans chaque cas, commencer par écrire les inégalités sous forme d'intervalles puis déterminer l'intersection des intervalles.

a) $0 \leq x \leq 5$ et $4 \leq x \leq 9$ b) $-5 < x < -1$ et $-3 < x < 0$

c) $7 \leq x < 9$ et $2 < x < 8$ d) $x < 9$ et $-1 < x \leq 2$

e) $x \geq 1$ et $x \leq 4$ f) $x > -3$ et $x < 0$

Exercice 6

Dans chaque cas, commencer par écrire les inégalités sous forme d'intervalles puis déterminer la réunion des intervalles.

a) $0 \leq x \leq 5$ **ou** $4 \leq x \leq 9$ b) $-5 < x < -1$ ou $-3 < x < 0$

c) $7 \leq x < 9$ ou $2 < x < 8$ d) $x < 9$ ou $-1 < x \leq 2$

e) $x \geq 1$ ou $x \leq 4$ f) $x > -3$ ou $x < 0$