دائرة المعارف: الأعداد الصحيحة الطبيعية

Cercle scientifique : Nombres entiers naturels

I- مصاديق القسمة **Critères de divisibilité**

- ✍ يكون عدد قابل للقسمة على 2 إذا كان رقم وحداته زوجيا.
- ✍ يكون عدد قابل للقسمة على 3 إذا كان مجموع أرقامه من مضاعفات 3 .
- ✍ يكون عدد قابل للقسمة على 4 إذا كان رقما وحداته وعشراته يكونان عددا قابلا للقسمة على 4 .
- ✍ يكون عدد قابل للقسمة على 5 إذا كان رقم وحداته 0 أو 5 .
- ✍ يكون عدد قابل للقسمة على 9 إذا كان مجموع أرقامه من مضاعفات 9 .

II- طريقة للبحث على عدد أولي **Méthode de recherche d'un nombre premier**

لكي نعرف هل عدد ما أولي أم لا نقوم بقسمته بطريقة متتابعة على الأعداد الأولية إلى أن نحصل على خارج أصغر من المقسوم عليه.

مثال: هل 157 عدد أولي ؟

- 157 غير قابل للقسمة على 2 و $\frac{157}{2} = 78,5$
- 157 غير قابل للقسمة على 3 و $\frac{157}{3} \simeq 52,3$
- 157 غير قابل للقسمة على 5 و $\frac{157}{5} = 31,4$
- 157 غير قابل للقسمة على 7 و $\frac{157}{7} = 22,4$
- 157 غير قابل للقسمة على 11 و $\frac{157}{11} \simeq 14,27$
- 157 غير قابل للقسمة على 13 و $\frac{157}{13} \simeq 12,07$

إذن $\frac{157}{13} \simeq 12,07$ أصغر من 13 .

نتيجة: 157 عدد أولي.

III- كيف نتعرف على عدد أولي؟ **Comment reconnaître qu'un nombre est premier ?**

مبرهنة مقبولة: ننظر هل العدد n قابل للقسمة على الأعداد الأولية التي هي أصغر من أو تساوي $\sqrt{n}$. إذا لم يكن كذلك فهو عدد أولي.

IV-Module sur les entiers naturels

Exercice1: Le nombre d'or est le nombre $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Vérifier les égalités suivantes :

$a) \quad \phi^2 = \phi + 1$	$b) \quad \phi = \dfrac{1}{\phi} + 1$	$c) \quad \phi^3 = 2\phi + 1$

1) Irrationalité de $\sqrt{2}$

Pythagore et ses disciples ont découvert ce nombre au VIe siècle avant J.-C., en cherchant le rapport entre la diagonale d'un carré et son côté. Or, son étude sur la musique avait conduit Pythagore à penser que « l'harmonie divine consiste en rapports numériques de nombres entiers ».

Hélas $\sqrt{2}$ ne rentrait pas dans ce monde rationnel ; c'est pourquoi Pythagore a nommé ces nombres des « irrationnels ». La démonstration par l'absurde de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ repose sur l'écriture des entiers.

On suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel, c'est à dire qu'il s'écrit sous forme irréductible, $\dfrac{p}{q}$, p et q étant des entiers naturels non nuls.

1. Justifier que $p^2 = 2q^2$. En déduire que p^2 est pair.

2. a) Démontrer que si p est pair, alors p^2 est pair et si p est impair, alors p^2 est impair.

b) En déduire que p est pair.

3. Puisque p est pair, posons $p = 2k$.

Démontrer alors que $q^2 = 2k^2$. En déduire, à l'aide des questions précédentes, que q est pair.

4. Pourquoi les réponses des questions 2 et 3 sont-elles contradictoires avec l'hypothèse ?

En déduire que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 2 : Un nombre parfait est un entier naturel égal à la somme de ses diviseurs, autre que lui-même. Ainsi 6 est un nombre parfait, car $6 = 1 + 2 + 3$ Trouver le seul nombre parfait compris entre 25 et 30.

Module sur les entiers naturels

Exercice 3 :Deux entiers positifs m et n sont dits amicaux, si la somme des diviseurs de m (autres que m) est égale à n et simultanément la somme des diviseurs de n (autres que n) est égale à m. Les plus petits nombres amicaux sont 220 et 284.

a) Décomposer en produit de nombres premiers 220 et 284.

b) Vérifier que 220 et 284 sont amicaux.

Exercice 4 : Deux voitures font des tours sur un circuit fermé ; elles partent toutes deux à midi de la ligne de départ. L'une parcourt le circuit en 30 minutes, l'autre en 36 minutes.
A quelle heure les deux voitures repasseront-elles en même temps la ligne de départ ? Combien auront-elles fait de tours ?

Exercice 5 :

1) a) Développer et réduire l'expression : $(n+1)^2 - n^2$

b) En déduire que tout nombre impair peut s'écrire comme la différence de deux carrés.

2) application à faire aux entiers 13 et 45.

Exercice 6 :

Les nombres de Fermat sont les nombres de la forme $F_n = 2^{2^n} + 1$ avec $n \in \mathbb{N}$.
Fermat avait conjecturé que les nombres F_n étaient tous des nombres premiers.
Calculer F_0 ; F_1 ; F_2 ; F_3 ; F_4 ; F_5. Que pensez-vous de la conjecture de Fermat ?

Exercice 7 :
En utilisant la décomposition en facteurs premiers, trouver un dénominateur commun le plus simple possible pour les trois fractions : $\frac{1}{756}$; $\frac{1}{504}$; $\frac{1}{466}$.

En déduire l'écriture de $\frac{1}{756} + \frac{1}{504} - \frac{1}{466}$ sous forme de fraction irréductible.

V- Crible d'Eratosthène

Le crible d'Eratosthène est une méthode permettant d'obtenir tous les nombres premiers inférieurs à un nombre donné.

Pour trouver par exemple tous les nombres premiers inférieurs à 100, on écrit dans un tableau tous les nombres de 1 à 100.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

On raye le nombre 1 qui n'est pas premier. Le premier nombre non rayé est 2, il est premier.
On raye tous les multiples de 2 supérieurs à 2.Le premier nombre non rayé est 3, il est premier.
On raye tous les multiples de 3 supérieurs à 3.Le premier nombre non rayé est 5, il est premier.
On raye tous les multiples de 5 supérieurs à 5.Le premier nombre non rayé est 7, il est premier.
On raye tous les multiples de 7 supérieurs à 7.Le premier nombre non rayé est 11,il est premier
On peut s'arrêter car $11 > \sqrt{100}$.
On a obtenu alors dans les cases non rayées, les nombres premiers inférieurs à 100.

Les nombres rayés ne sont pas premiers puisque ce sont des multiples de l'un des nombres qui précèdent.
Si un nombre N n'est pas rayé, c'est que N n'est multiple d'aucun des nombres non rayés strictement inférieurs à 11, donc N n'est multiple d'aucun nombre premier strictement inférieur à $\sqrt{N}$, donc N est premier.

P ={2,3,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97}

V- غربال إراطوستين **Crible d'Eratosthène**

🕮 ✵ **<u>طريقة عملية لتحديد الأعداد الأولية الأصغر من أو تساوي عددا معلوما</u>** ✵

لكي نحدد مثلا الأعداد الأولية الأصغر من أو تساوي العدد 100، نكتب في جدول كل الأعداد من 1 إلى 100.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

≅ نشطب العدد 1 لأنه ليس أوليا.

≅ أول عدد لا نشطبه هو العدد 2 وهو أول عدد أولي، ونشطب كل مضاعفاته المخالفة له.

≅ العدد 3 أولي لا نشطبه وكل مضاعفاته المخالفة له ليست أولية نشطبها .

≅ العدد 5 أولي لا نشطبه وكل مضاعفاته المخالفة له ليست أولية نشطبها .

≅ العدد 7 أولي لا نشطبه وكل مضاعفاته المخالفة له ليست أولية نشطبها .

≅ العدد 11 أولي لا يمكن أن يكون قاسما لأي من الأعداد التي لم يشطب عليها لأن $11>\sqrt{100}$.

🕯 كل الأعداد التي لم يشطب عليها في هذا الجدول هي أعداد أولية.

⇦ إذا كان عدد N لم يشطب عليه، فهذا يعني أنه ليس مضاعفا لأي من الأعداد التي هي أصغر قطعا من 11 ولم يشطب عليها، إذن N ليس مضاعفا لأي عدد أولي أصغر قطعا من $\sqrt{N}$ ،
إذن N عدد أولي.