Calcul Trigonométrique الحساب المثلثي (1)

1) أنشطة " تذكير"

① أتمم الجدول التالي:

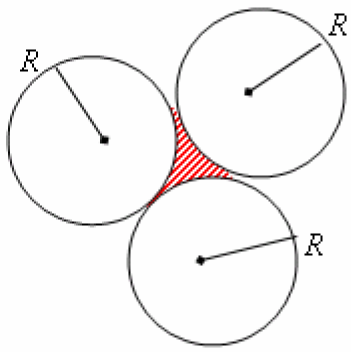
الدرجــة	30		15		60		10
الراديـان		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{4}$	

لتكن x قياس زاوية بالراديان و y قياس نفس الزاوية بالدرجة.
حدد العلاقة بين x و y.

② أتمم الجدول التالي :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$					
$\cos\theta$					
$\tan\theta$					

③ أحسب محيط ومساحة الجزء المخدش.

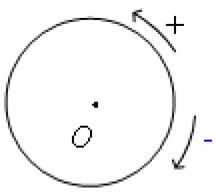


ملاحظة : يجب التذكير بطول القوس الهندسية ومساحة القطاع الدائري.
" إذا كانت A و B نقطتين من الدائرة شعاعها R.
و α قياس للزاوية المركزية التي تحصر القوس $\left[\widehat{AB}\right]$
فإن طول القوس $\left[\widehat{AB}\right]$ هو $R\alpha$
ومساحة القطاع الزاوي الذي يحصر القوس $\left[\widehat{AB}\right]$ هي $\frac{1}{2}\alpha R^2$

1) الدائرة المثلثية Cercle trigonométrique

1-2. توجيه المستوى

- توجيه الدائرة



توجيه دائرة هو اختيار أحد المنحنيين.
منحى موجب ويسمى المنحى المباشر

منحى سالب ويسمى المنحى الغير المباشر
المنحى المباشر هو المنحى المعاكس لحركة عقارب الساعة.

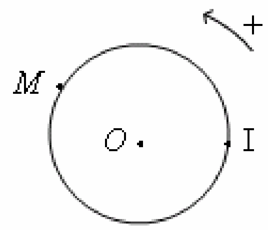
ملاحظة : عندما توجه جميع دوائر المستوى توجيها موحدا، نقول إننا وجهنا المستوى وإن المستوى موجه.

1-2. الدائرة المثلثية

تعريف : الدائرة المثلثية هي دائرة شعاعها $R=1$ مزودة بنقطة أصل وموجه توجيها موجبا.

ملاحظة : عادة نأخذ مركز الدائرة المثلثية منطبق مع أصل المعلم.

1) الأفصول المنحنى لنقطة على الدائرة المثلثية.



- **تمهيد :** لتكن (ℓ) الدائرة المثلثية التي أصلها I.

ولتكن M نقطة من (ℓ).

وليكن l طول المسار من I إلى M بالتحرك على الدائرة (ℓ)

$0 \le l \le 2\pi$

لكي ننتقل من I إلى M بالتحرك على الدائرة لدينا
إمكانيتين إما أن نثير وفق المنحى الموجب أو وفق المنحى السالب.

الإمكانية الأولى

نصل إلى M بعد قطع مسار طوله l
إذا تابعنا الطريق بالتحرك على الدائرة
نصل إلى M بعد قطع مسار طوله $l+2\pi$
و نصل إلى M للمرة الثالثة بعد قطع مسار طوله $l+2\pi+2\pi=l+4\pi=l+2(2\pi)$
و نصل إلى M للمرة $(k+1)$ بعد قطع مسار طوله $l+k(2\pi)$

الإمكانية الثانية

نصل إلى M للمرة الأولى بعد قطع مسار طوله $l-(2\pi)$
و للمرة الثانية بعد قطع مسار طوله $l-2(2\pi)$
و للمرة $k+1$ بعد قطع مسار طوله $l-k(2\pi)$

ملاحظة
- في كلتي الحالتين قياس المسار للذهاب من I إلى M هو $l+\lambda(2\pi)$ بحيث $\lambda \in \mathbb{Z}$
- كل عدد يكتب على شكل $l+2\lambda\pi$ يسمى أفصولا منحنيا للنقطة M.

تعريف① لتكن M نقطة من الدائرة المثلثية و l طول القوس الذي طرفاه I و M بالذهاب من I إلى M في الاتجاه الموجب.
كل عدد يكتب على شكل $l+2k\pi$ بحيث $k \in \mathbb{Z}$ يسمى أفصولا منحنيا للنقطة M.

ملاحظة : ليكن x أفصولا منحنيا للنقطة M
و y أفصولا منحنيا للنقطة M
فإنه يوجد k و k' بحيث $x=l+2k\pi$ و $y=l+2k'\pi$
إذن $x-y=2(k-k')\pi$

إذن يوجد λ من $\mathbb{Z}$ بحيث $x-y=2\lambda\pi$

خاصية① : إذا كان x و y أفصولين منحنيين للنقطة M
فإنه يوجد λ عدد من $\mathbb{Z}$ بحيث $x-y=2\lambda\pi$
ونكتب $x\equiv y[2\pi]$
ونقرأ : x يساوي y بترديد 2π

خاصية② : إذا كان x أفصولا منحنيا للنقطة M
فإن كل الأفاصيل المنحنية للنقطة M تكتب على شكل $x+2k\pi$ بحيث $k\in\mathbb{Z}$.

تعريف② لتكن M نقطة من الدائرة المثلثية (ℓ).
يوجد أفصول منحنى وحيد للنقطة M ينتمي إلى المجال $]-\pi,\pi]$ يسمى الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة M.

تطبيقـات :

1) حدد الأفصول المنحنى الرئيس للنقطة M إذا علمت أن إحدى أفاصيلها المنحنية هو α في الحالات التالية :

a) $\alpha=\dfrac{17\pi}{4}$

b) $\alpha=-\dfrac{19\pi}{3}$

c) $\alpha=\dfrac{1999\pi}{2}$

2) أنشئ على الدائرة المثلثية النقط M_k التي إفاصيلها المنحنية هي :

1- $\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$

2- $\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi$

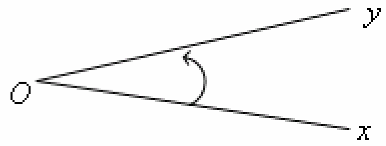
3- $\dfrac{7\pi}{4}+2k\pi$

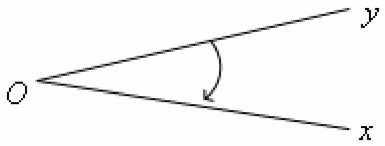
2) الزاوية الموجهة لنصفي مستقيم — Angle orienté de deux demi droites

- ليكن $[Ox)$ و $[Oy)$ نصفي مستقيم

الزوج $([Ox),[Oy))$ المكون من نصفي المستقيم $[Ox)$ و $[Oy)$ يحدد زاوية موجهة لنصفي مستقيم
يرمز لها بالرمز $(\widehat{Ox,Oy})$

- الزوج $([Oy),[Ox))$ يحدد زاوية موجهة لنصفي مستقيم
يرمز لها بالرمز $(\widehat{Oy,Ox})$





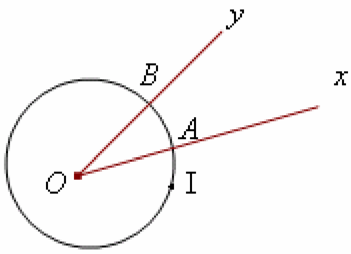
- لتكن $\left(\widehat{Ox,Oy}\right)$ زاوية موجهة لنصف مستقيم $[Ox)$ و $[Oy)$.

ولتكن (ℓ) الدائرة المثلثية التي مركزها O.

و A نقطة تقاطع (ℓ) مع $[Ox)$

و B نقطة تقاطع (ℓ) مع $[Oy)$.

ولتكن a قياس الزاوية الهندسية $\left[A\hat{O}B\right]$, $0 \le a \le \pi$



ليكن α أفصولا منحنيا للنقطة A

و β أفصولا منحنيا للنقطة B

لدينا إذن $\beta = \alpha + a + 2k\pi$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

ومنه $a = \beta - \alpha + 2k\pi$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

إذن قياسات الزاوية $\left(\overline{Ox,Oy}\right)$ تكتب على شكل $\beta - \alpha + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

نرمز لهذه القياسات بـ $\left(\overline{Ox,Oy}\right)$

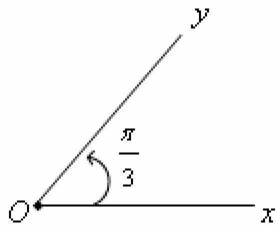
إذن $\left(\overline{Ox,Oy}\right) = \beta - \alpha + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$

أي $\left(\overline{Ox,Oy}\right) \equiv \beta - \alpha\,[2\pi]$

تعريف : من بين القياسات لآية زاوية موجهة يوجد قياس وحيد ينتمي إلى المجال $]-\pi,\pi]$ ويسمى القياس الرئيسي لهذه الزاوية الموجهة.

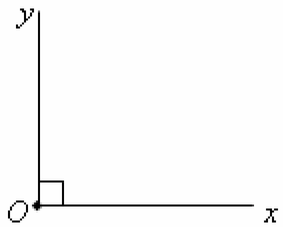
ملاحظة : القيمة المطلقة للقياس الرئيس للزاوية $\left(\widehat{Ox,Oy}\right)$ هو قياس الزاوية الهندسية $\left[\widehat{Ox,Oy}\right]$.

أمثلة :



$\left(\overline{Ox,Oy}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

$\left(\overline{Oy,Ox}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$

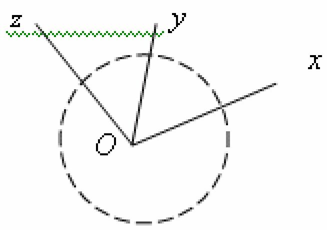


$\left(\overline{Ox,Oy}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\left(\overline{Oy,Ox}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

علاقة شال

$\left(\overline{Ox,Oy}\right) + \left(\overline{Oy,Oz}\right) \equiv \left(\overline{Ox,Oz}\right)[2\pi]$



نتائــج : • $\left(\overline{Ox,Oy}\right) \equiv 0\left[2\pi\right]$

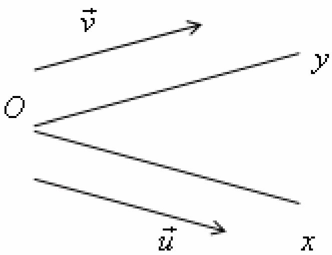
• $\left(\overline{Ox,Oy}\right) \equiv -\left(\overline{Oy,Ox}\right)\left[2\pi\right]$

• إذا كانت $\left(\overline{Ox,Oy}\right) \equiv \left(\overline{Ox,Oz}\right)\left[2\pi\right]$ فإن نصفي مستقيم $\left[Oy\right)$ و $\left[Oz\right)$ منطبقان.

تطبيقـات : ① اعط القياس الرئيس للزاوية $\left(\widehat{OA,OB}\right)$ إذا علمت أن :

(a $\left(\overline{OI,OA}\right) \equiv \frac{\pi}{4}\left[2\pi\right]$ و $\left(\overline{OI,OB}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\left[2\pi\right]$

(b $\left(\overline{OI,OA}\right) \equiv 30^\circ\left[360^\circ\right]$ و $\left(\overline{OI,OB}\right) \equiv -\frac{\pi}{10}\left[2\pi\right]$



3) زاوية زوج متجهتين غير منعدمتين

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين و O نقطة.

ليكن $\left[Ox\right)$ و $\left[Oy\right)$ نصفي مستقيم متجهتاهما $\vec{u}$ و $\vec{v}$ على التوالي

زاوية زوج المتجهتين $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ هي الزاوية الموجهة $\left(\widehat{Ox,Oy}\right)$

ويرمز لها بالرمز $\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$.

• القياس الرئيس للزاوية $\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$ هو القياس الرئيس للزاوية $\left(\widehat{Ox,Oy}\right)$.

ملاحظة : • إذا كانت $\overrightarrow{OB} = \lambda\vec{u}$ و $\overrightarrow{OA} = k\vec{u}$ حيث $\lambda \succ 0$ و $k \succ 0$

فإن $\left(\overline{\vec{u},\vec{v}}\right) \equiv \left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)\left[2\pi\right]$

$\left(\overline{\vec{u},\vec{v}}\right)$ قياسا للزاوية $\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$.

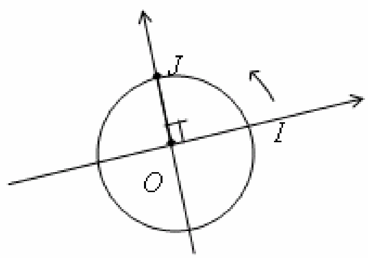
• $\left(\overline{\vec{u},\vec{w}}\right) + \left(\overline{\vec{w},\vec{v}}\right) \equiv \left(\overline{\vec{u},\vec{v}}\right)\left[2\pi\right]$

3) المعلم المتعامد الممنظم المرتبط بالدائرة المثلثية.

لتكن $\left(\ell\right)$ دائرة مثلثية مركزها O وأصلها I.

و J نقطة من $\left(\ell\right)$ بحيث $\left(\overline{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}}\right)$ زاوية قائمة موجهة.

المعلم $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$ يسمى المعلم المتعامد الممنظم المرتبط بالدائرة المثلثية $\left(\ell\right)$.



4) الأفاصيل المنحنية والتماثلات.

لتكن $\left(\ell\right)$ دائرة مثلثية و $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$ معلما م م مرتبطا بها.

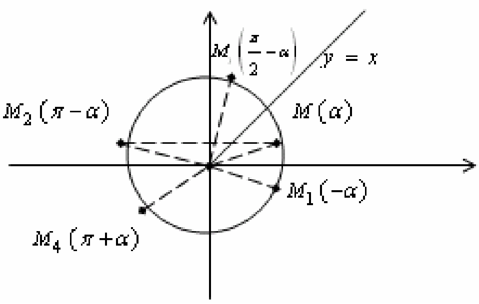
لتكن M نقطة من الدائرة المثلثية و α أفصولا منحنيا لها.

• إذا كانت M_1 المماثل لـ M بالنسبة لمحور الأفاصيل

فإن $\left(-\alpha\right)$ أفصولا منحنيا لـ M_1.

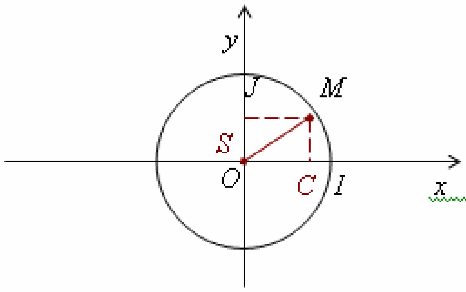
• إذا كانت M_2 المماثل لـ M بالنسبة لمحور الأراتيب

فإن $\left(\pi-\alpha\right)$ أفصولا منحنيا لـ M_2.



- إذا كانت M_3 المماثل لـ M بالنسبة للمنصف الأول $(y=x)$ فإن $\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ أفصولا منحنيا لـ M_3.
- إذا كانت M_4 المماثل لـ M بالنسبة لأصل المعلم فإن $(\pi+\alpha)$ أفصولا منحنيا لـ M_4.

5) الدوال المثلثية Les fonctions trigonométriques



لتكن M نقطة من الدائرة المثلثية، و x أفصولا منحنيا لها.

العدد $\overline{OC}$ هو أفصول النقطة M.

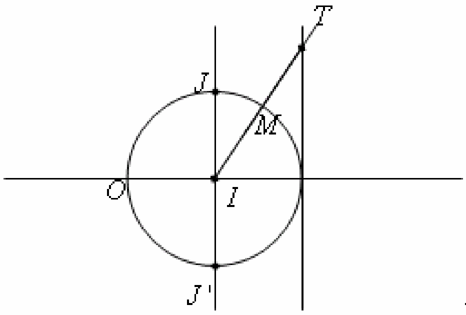
و $\overline{OS}$ هو أرتوب النقطة M في المعلم $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$.

العدد $\overline{OC}$ يسمى جيب تمام العدد الحقيقي x ونكتب $\cos x=\overline{OC}$

والعدد $\overline{OS}$ يسمى جيب العدد الحقيقي x ونكتب $\sin x=\overline{OS}$

ملاحظة : $\cos x=\cos(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM})$

$\sin x=\sin(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM})$



العدد $\overline{IT}$ يسمى ظل العدد الحقيقي x حيث x أفصولا منحنيا لـ M.

ونرمز له بـ $\tan x=\overline{IT}$

ملاحظة : إذا كانت النقطة M منطبقة مع J أو J'

فإن العدد $\overline{IT}$ غير موجود.

ومنه إذا كانت M أفصولها المنحني هو $x=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi$

يعني $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$

فإن ظل هذا العدد غير موجود.

تعريف : • الدالة العددية المعرفة بـ

$$\cos : \mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto \cos x$$

تسمى دالة جيب التمام.

• الدالة العددية المعرفة بـ

$$\sin : \mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto \sin x$$

تسمى دالة الجيب.

• الدالة العددية المعرفة على $D:\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi ; k\in\mathbb{Z}\right\}$ بـ

$$\tan : D\to\mathbb{R},\quad x\mapsto \tan x$$

تسمى دالة الظل.

خاصيات و" تذكير وإضافات"

1) لكل x من $\mathbb{R}$: $-1\le\cos x\le 1$ و $-1\le \sin x\le 1$

2) لكل x من $\mathbb{R}$: $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

3) لكل x من $\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$: $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$

4) لكل x من $\mathbb{R}$: $\cos(x+2k\pi)=\cos x$; $\sin(x+2k\pi)=\sin x$; $k\in\mathbb{Z}$

5) لكل x من $\mathbb{R}$:

$$\cos(-x)=\cos x$$

$$\sin(-x)=-\sin x$$

استنتاج : الدالة $\cos$ زوجيــة

الدالة $\sin$ فرديــة

6) لكل x من $\mathbb{R}$:

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$
$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

7) لكل x من $\mathbb{R}$:

$$\cos(\pi + x) = \dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\sin(\pi + x) = \dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \dots\dots\dots\dots\dots$$

8) لكل عدد حقيقي يخالف $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

الدالة $\tan$ دالة فرديــة .

9) لكل x من $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$:

$$\tan(x + \pi) = \tan x$$
$$\tan(x + k\pi) = \tan x$$

6) المعادلات المثلثية

1) المعادلة $\cos x = a$

أمثلـة

2) المعادلة $\sin x = a$

أمثلـة

3) المعادلة $\tan x = a$

أمثلـة

4) معادلات تؤول في حلها إلى معادلات أساسية.

أمثلـة

مثال ① : $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos(3x)$

مثال ② : $\cos(2x) = \sin x$

مثال ③ : $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2x + \frac{\pi}{3}$

مثال ④ : $\cos^2 x - 3\cos x + 2 = 0$

مثال ⑤ : $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

خلاصة : $k \in \mathbb{Z}$ أو

$$\cos x = \cos y \iff \begin{cases} x = y + 2k\pi \\ x = -y + 2k\pi \end{cases}$$

$k \in \mathbb{Z}$ أو

$$\iff \begin{cases} x = y + 2k\pi \\ x = \pi - y + 2k\pi \end{cases}$$