

## النظـمات

### 1- معادلات من الدرجة الأولى بمجهولين

#### 1- أنشطة

نعتبر في  $\mathbb{R}^2$  المعادلة  $3x - 2y + 1 = 0$

هل الأزواج  $(1; 2)$  و  $(2; -1)$  و  $(0; \frac{1}{2})$  حلول للمعادلة

لنحدد جميع حلول المعادلة

لتكن  $S$  مجموعة الحلول

$$S = \left\{ \left( a; \frac{3a+1}{2} \right) / a \in \mathbb{R} \right\} \text{ إذن}$$

$$\text{الطريقة 1} \text{ نضع } x = a \text{ ومنه } y = \frac{3a+1}{2}$$

$$S = \left\{ \left( \frac{2b-1}{3}; b \right) / b \in \mathbb{R} \right\} \text{ إذن}$$

$$\text{يمكن أن نضع } y = b \text{ ومنه } x = \frac{2b-1}{3}$$

الطريقة 2 نعتبر المستقيم  $(D): 3x - 2y + 1 = 0$

$(D)$  مار من  $A(1; 2)$  و موجه بـ  $\vec{u}(3; 2)$

$$\text{ومنه تمثيل بارامتري لـ } (D) \text{ هو } \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \end{cases} t \in \mathbb{R}$$

$$\text{إذن } S = \{(1 + 2t; 2 + 3t) / t \in \mathbb{R}\}$$

#### 2- تعريف

كل معادلة على شكل  $ax + by + c = 0$  حيث  $a$  و  $b$  و  $c$  أعداد حقيقية معلومة هي معادلة من الدرجة الأولى

بمجهولين حل المعادلة  $ax + by + c = 0$  هو إيجاد جميع الأزواج التي تحققها

#### 3- صفة عامة

نحل المعادلة  $ax + by + c = 0$

\* إذا كان  $a = b = 0$  فانه لدينا حالتان

- إذا كان  $c = 0$  فان  $S = \mathbb{R}^2$

- إذا كان  $c \neq 0$  فان  $S = \emptyset$

\* إذا كان  $a \neq 0$  أو  $b \neq 0$  فانه لدينا الحالات التالية

$$\text{- إذا كان } a \neq 0 \text{ و } b = 0 \text{ فان } S = \left\{ \left( \frac{-c}{a}; y \right) / y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{- إذا كان } a = 0 \text{ و } b \neq 0 \text{ فان } S = \left\{ \left( x; \frac{-c}{b} \right) / x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{- إذا كان } a \neq 0 \text{ و } b \neq 0 \text{ فان } \vec{u}(-b; a) \text{ موجهة للمستقيم } (D): ax + by + c = 0 \text{ المار من } A\left(0; \frac{-c}{b}\right)$$

$$\text{إذن } t \in \mathbb{R} \begin{cases} x = -bt \\ y = \frac{-c}{b} + at \end{cases}$$

$$\text{ومنه } S = \left\{ \left( -bt; \frac{-c}{b} + at \right) / t \in \mathbb{R} \right\}$$

#### تمرين

حل في  $\mathbb{R}^2$  المعادلات  $2x + y - 1 = 0$

$$3x - 1 = 0 ; 2y + 4 = 0$$

### II - النظـمات

#### 1- أنشطة

أ- بين أن النظام  $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 4x + 5y = -2 \end{cases}$  تقبل حلا وحيدا بدون حساب المجهولين ثم حل النظام بطريقتين مختلفتين (التعويضية و التآلفية الخطية)

ب- بين أن النظام  $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ -\frac{2}{3}x + y = -2 \end{cases}$  لا تقبل حلا

## 2- دراسة نظام معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

### (a) دراسة عامة

لنحل في  $\mathbb{R}^2$  النظام  $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$  حيث  $(a; b) \neq (0; 0)$  و  $(a'; b') \neq (0; 0)$

في مستوى منسوب إلى معلم نعتبر  $(D): ax + by - c = 0$  و  $(D'): a'x + b'y - c' = 0$   
دراسة النظام يرجع لدراسة الأوضاع النسبية للمستقيمين  $(D)$  و  $(D')$  و نعلم أن هذا يتوقف على العدد  $ab' - a'b$

العدد  $ab' - a'b$  يسمى محددة النظام نرسم له  $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$

\* إذا كان  $ab' - a'b \neq 0$  فإن  $(D)$  و  $(D')$  متقاطعان في نقطة وحيدة .

إذن النظام تقبل حلا وحيدا

\* إذا كان  $ab' - a'b = 0$  فإن  $(D)$  و  $(D')$  متوازيان

- إما أن يكونا  $(D)$  و  $(D')$  منطبقان فإن مجموعة حلول النظام هي مجموعة حلول المعادلة  $ax + by = c$   
- إما أن يكونا  $(D)$  و  $(D')$  منفصلان فإن مجموعة حلول النظام فارغة.

### خاصة وتعريف

\* للنظام  $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$  حل وحيد إذا وفقط إذا كان  $ab' - a'b \neq 0$

\* للنظام  $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$  ما لانهاية من الحلول أو ليس لها حلا إذا وفقط إذا كان  $ab' - a'b = 0$

العدد  $ab' - a'b$  يسمى محددة النظام يكتب  $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$  نرسم له  $\Delta$

### (b) نظام كرامر

لنحل في  $\mathbb{R}^2$  النظام  $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$  حيث  $\Delta = ab' - a'b \neq 0$   
 $x = \frac{cb' - c'b}{\Delta}$  ;  $y = \frac{ac' - a'c}{\Delta}$

### تعريف و خاصة

عندما تكون محددة النظام  $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$  غير معدمة نسمي هذه النظام نظام كرامر

و في هذه الحالة لدينا  $x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\Delta}$  ;  $y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\Delta}$  حيث  $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$

### تمرين

حل في  $\mathbb{R}^2$   $\begin{cases} 2x + y = -2 \\ -3x - \frac{3}{2}y = 3 \end{cases}$   $\begin{cases} \sqrt{2}x - y = 2 \\ x - \frac{\sqrt{2}}{2}y = 1 \end{cases}$   $\begin{cases} 2\sqrt{3}x - y = 2 \\ 3x + \sqrt{3}y = 3 \end{cases}$

### 3- نظمات تالفة أخرى

أ- نظمة ثلاث معادلات بمجهولين

حل في  $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ x - y = 4 \\ 3x + y = 5 \end{cases} ; \begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ x + 2y = -4 \\ 3x - 4y = -2 \end{cases}$$

ب- نظمة معادلات من الدرجة الأولى بعدة مجاهيل

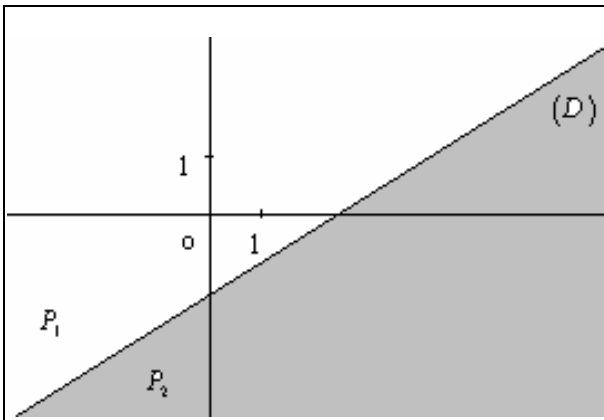
حل في  $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ x + 2y - z = 1 \end{cases} ; \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y + z = 1 \\ x - 2y + 2z = 5 \end{cases}$$

### III- المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهولين

1- إشارة  $ax + by + c$

خاصة



كل مستقيم  $(D)$  معادلته  $ax + by + c = 0$  يحدد في المستوى

نصفي مستوي مفتوحين  $P_1$  و  $P_2$  (لايتضمنان  $(D)$ )

أحدهما هو مجموعة النقط  $M(x; y)$  حيث  $ax + by + c < 0$

و الآخر هو مجموعة النقط  $M(x; y)$  حيث  $ax + by + c > 0$

### ملاحظة

لتحديد إشارة  $ax + by + c$  يكفي تحديدها من أجل زوج إحداثيتي نقطة  $A$  من المستوى لا تنتمي

إلى  $(D)$  نصف المستوى الذي يحتوي على  $A$  وحافته  $(D)$  هو مجموعة النقط  $M(x; y)$  التي تكون فيه

إشارة  $ax + by + c$  هي إشارة  $ax_0 + by_0 + c$ . و نصف المستوى الآخر هو مجموعة النقط  $M(x; y)$  التي

كون فيه إشارة  $ax + by + c$  هي عكس إشارة  $ax_0 + by_0 + c$

### أمثلة

أدرس في  $\mathbb{R}^2$  إشارة كل من  $-2x + 3y - 2$  و  $2y - 1 >$

### تمرين

حل في  $\mathbb{R}^2$  مبيانيا

$$\begin{cases} 3x + y < 0 \\ x - y + 4 > 0 \\ 2x + 5y + 8 > 0 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} 2x + y < 0 \\ 3x + y \leq 2 \end{cases}$$

### 2- البرمجة الخطية

#### تمرين

يصنع صانع منتوجين  $A$  و  $B$  بواسطة مواد أولية  $M_1$  و  $M_2$  و  $M_3$ .

يتطلب صنع وحدة من المنتج  $A$ : 1 كيلو من  $M_1$  و 3 كيلو من  $M_2$  و 3 كيلو من  $M_3$ .

يتطلب صنع وحدة من المنتج  $B$ : 2 كيلو من  $M_1$  و 2 كيلو من  $M_2$  و كيلو واحد من  $M_3$ .

المواد المتوفرة في اليوم الواحد هو 20 كيلو من  $M_1$  و 30 كيلو من  $M_2$  و 27 كيلو من  $M_3$ .

إذا علمت أن بيع وحدة من نوع  $A$  يحقق ربحا قدره 40 درهما و بيع وحدة من نوع  $B$  يحقق ربحا قدره 20

درهما. فما هو عدد وحدات منتج  $A$  و عدد وحدات منتج  $B$  اللذان يحققان أكبر ربح؟

لتكن  $x$  عدد وحدات منتج  $A$  و  $y$  عدد وحدات منتج  $B$   
 لإنتاج  $A$  و  $B$  يتطلب  $(x + 2y)Kg$  من  $M_1$  حيث  $x + 2y < 20$  و  $(3x + 2y)Kg$  من  $M_2$  حيث  
 $3x + y < 27$  و  $(3x + y)Kg$  من  $M_3$  حيث  $3x + 2y < 30$   
 الزوج  $(x; y)$  الذي يمثل إنتاج ينتمي إلى مجموعة حلول

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y - 20 < 0 \\ 3x + 2y - 30 < 0 \\ 3x + y - 27 < 0 \end{cases}$$

الربح هو  $40x + 20y$

نعتبر  $(\Delta_0): 40x + 20y = 0$  و  $(\Delta_b): 40x + 20y = b$  حيث  $b$  ربح عند إنتاج  $x$  وحدة من منتج  $A$  و  $y$  عدد وحدة من منتج  $B$  و حيث  $(\Delta_b)$  يحتوي على الأقل على نقطة من الجزء الملون

$b$  تأخذ أكبر قيمة عند زوج إحداثيتي تقاطع المستقيمين ذا المعادلتين  $3x + y = 27$  ;  $3x + 2y = 30$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 30 \\ 3x + y = 27 \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) = (8; 3)$$

الربح القصوي هو  $40 \times 8 + 20 \times 3 = 380DH$

