

## الترتيب في IR

### القدرات المنتظرة

- \*- التمكن من مختلف تقنيات مقارنة عددين (أو تعبيرين) واستخدام المناسب منها حسب الوضعية المدروسة.
- \*- تمثيل مختلف العلاقات المرتبطة بالترتيب على المستقيم العددي.
- \*- إدراك وتحديد تقريب عدد (أو تعبير) بدقة معلومة. إنجاز إكبارات أو إصغارات لتعابير جبرية.
- \*- استعمال المحسبة لتحديد قيم مقربة لعدد حقيقي.

### 1- الترتيب و العمليات

#### 1- أنشطة

##### تمرين 1

ليكن  $a$  عددا حقيقيا قارن  $2a$  و  $a^2 + 1$

##### تمرين 2

ليكن  $a$  و  $b$  عددين حقيقيين بحيث  $-2 \leq a \leq 3$  ;  $-1 \leq b \leq 4$   
بين أن  $-41 \leq a^2 - b^2 + 3a - 5b + 1 \leq 24$

##### تمرين 3

قارن  $3\sqrt{3}$  و  $1+3\sqrt{2}$

##### تمرين 4

ليكن  $x \in \mathbb{R}_+$

أ- بين أن  $\sqrt{x^2+1}-x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

ب- قارن  $\sqrt{x^2+1}-x$  و  $\frac{1}{2x}$

##### تمرين 5

ليكن  $a$  و  $b$  عددين حقيقيين سالبين قطعا حيث  $a \neq b$

قارن  $1-\frac{b}{a}$  و  $\frac{a}{b}-1$

### 2- تعريف و خاصيات

#### أ تعريف

ليكن  $a$  و  $b$  عددين حقيقيين

$a \geq b$  يعني  $a - b \geq 0$

$a \leq b$  يعني  $a - b \leq 0$

#### ب- خاصيات و نتائج

ليكن  $a$  و  $b$  و  $c$  و  $d$  أعداد حقيقية

إذا كان  $a \geq b$  و  $b \geq c$  فإن  $a \geq c$

إذا كان  $a \geq b$  فإن  $a + c \geq b + c$

إذا كان  $a \geq b$  و  $c \geq d$  فإن  $a + c \geq b + d$

إذا كان  $a \geq b$  و  $c \geq 0$  فإن  $ac \geq bc$

إذا كان  $a \geq b$  و  $c \leq 0$  فإن  $ac \leq bc$

إذا كان  $a \geq b \geq 0$  فإن  $a^2 \geq b^2$

إذا كان  $0 \geq a \geq b$  فإن  $a^2 \leq b^2$

$0 \leq a \leq b$  تكافئ  $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

إذا كان  $a$  و  $b$  عددين غير منعدمين و لهما نفس لإشارة و كان  $a \leq b$  فإن  $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

نبين نتيجة الأخيرة  
 $a$  و  $b$  عددين غير منعدمين و لهما نفس لإشارة ومنه  $ab > 0$   
لدينا  $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$   
وحيث أن  $a \leq b$  فإن  $b-a \geq 0$  و بالتالي  $\frac{b-a}{ab} \geq 0$  اذن  $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

## II- المجالات

### 1- مجالات المجموعة $\mathbb{R}$

ليكن  $(a; b) \in \mathbb{R}^2$  حيث  $a < b$

قراءة و تمثيل على المستقيم	ترميزها	مجموعة الاعداد الحقيقية X حيث:
يقراً المجال المغلق الذي طرفاه $a$ و $b$ 	$[a; b]$	$a \leq x \leq b$
يقراً المجال المفتوح الذي طرفاه $a$ و $b$ 	$]a; b[$	$a < x < b$
يقراً المجال المفتوح على اليمين الذي طرفاه $a$ و $b$ 	$[a; b[$	$a \leq x < b$
يقراً المجال المفتوح على اليسار الذي طرفاه $a$ و $b$ 	$]a; b]$	$a < x \leq b$
يقراً المجال $a$ زائد ما لانهاية مغلق في $a$ 	$[a; +\infty[$	$a \leq x$
يقراً المجال $a$ زائد ما لانهاية مفتوح في $a$ 	$]a; +\infty[$	$a < x$
يقراً المجال ناقص لانهاية، $b$ مغلق في $b$ 	$] -\infty; b]$	$x \leq b$
يقراً المجال ناقص لانهاية، $b$ مفتوح في $b$ 	$] -\infty; b[$	$x < b$

أمثلة

$$[-1; 4] = \{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x \leq 4\}^*$$

$$\sqrt{3} \in [-1; 4] \quad \frac{-1}{2} \in [-1; 4] \quad -2 \notin [-1; 4]$$

$$]-\infty; 2[ = \{x \in \mathbb{R} / x < 2\}^*$$

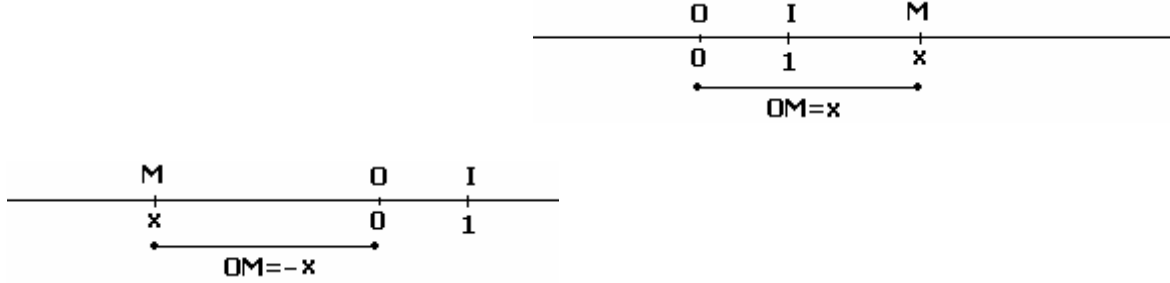
$$-\sqrt{2} \in ]-\infty; 2[ \quad \pi \notin ]-\infty; 2[ \quad 2 \notin ]-\infty; 2[$$

### III- القيمة المطلقة

#### 1- القيمة و المطلقة

##### تعريف

ليكن  $\Delta(O; I)$  مستقيما مدرجا  
القيمة المطلقة لكل عدد حقيقي  $x$  هي المسافة بين النقطة  $M$  التي أفصولها  $x$   
والنقطة  $O$ . نكتب  $OM = |x|$  نكتب



ليكن  $x \in \mathbb{R}$

إذا كان  $x \geq 0$  فإن  $|x| = x$

إذا كان  $x \leq 0$  فإن  $|x| = -x$

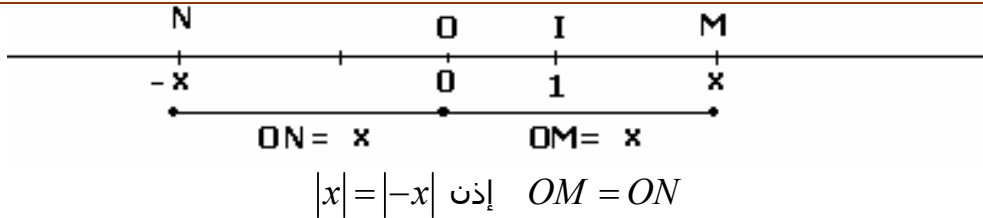
##### أمثلة

$$|2 - \pi| = \pi - 2 ; \quad |\sqrt{3} - 1| = \sqrt{3} - 1 ; \quad |-12| = 12 ; \quad |\sqrt{2}| = \sqrt{2}$$

##### تمرين

$$\text{حدد } |1 - \sqrt{2}| \text{ و } \sqrt{(4 - \sqrt{15})^2} \text{ و } \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2}$$

##### (c) خاصيات



\*- لكل  $x \in \mathbb{R}$   $|x| \geq 0$  ،  $x \leq |x|$  ،  $-x \leq |x|$  ،  $|x| = |-x|$  ،  $|x|^2 = x^2$

\*- ليكن  $x$  و  $y$  من  $\mathbb{R}$  و  $a$  من  $\mathbb{R}^+$

✓  $|x| = 0$  تكافئ  $x = 0$

✓  $|x| = a$  تكافئ  $x = a$  أو  $x = -a$

✓  $|x| = |y|$  تكافئ  $x = y$  أو  $x = -y$ .

✓  $|xy| = |x||y|$  ؛  $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$  ;  $y \neq 0$

✓  $|x| \leq a$  تكافئ  $-a \leq x \leq a$

✓  $|x + y| \leq |x| + |y|$

##### بين نتيجتين الأخيرتين

## تمارين

### تمرين 1

ليكن  $x \in \mathbb{R}$

1- أكتب التعبيرات التالية بدون استعمال القيمة المطلقة

$$|x-2| + |x+3| \quad , \quad |3-x| \quad , \quad |2x-1|$$

2- بين بدون حذف رمز القيمة المطلقة أن  $|x-5| + |x+1| \neq 4$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$

### تمرين 2

ليكن  $x \in \mathbb{R}$

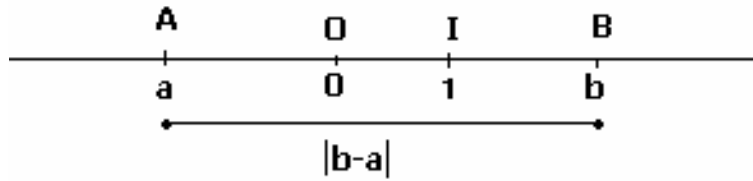
بين إذا كان  $|x-1| < 10^{-3}$  فإن  $|x^2-1| < 10^{-2}$

## 2- المسافة بين نقطتين و القيمة المطلقة

خاصية

ليكن  $A(a)$  و  $B(b)$  نقطتين على مستقيم مدرج  $\Delta(O;I)$

$$AB = |b-a|$$



### تعريف

المسافة  $|b-a|$  لنقطتين  $A(a)$  و  $B(b)$  على مستقيم مدرج ، تسمى أيضا

المسافة بين العددين  $a$  و  $b$

### أمثلة

\* لنحدد الأعداد  $x$  التي مسافتها عن 3 هي 5

\* حدد هندسيا على المستقيم المدرج  $\Delta(O;I)$  النقطة  $M(x)$  حيث  $|x-2| = |x+5|$

## 3- مركز و سعة و شعاع مجال

ليكن  $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

على المستقيم المدرج  $\Delta(O;I)$  نعتبر  $A(a)$  ;  $B(b)$

طول  $[A;B]$  هو  $|b-a|$

أفصول  $I$  منتصف  $[A;B]$  هو  $\frac{a+b}{2}$

$$IA = IB = \frac{|b-a|}{2}$$

### تعريف

ليكن  $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

مركز مجال طرفاه  $a$  و  $b$  هو  $\frac{a+b}{2}$

سعة مجال طرفاه  $a$  و  $b$  هو  $|b-a|$

شعاع مجال طرفاه  $a$  و  $b$  هو  $\frac{|b-a|}{2}$

### تمرين

- 1- حدد مركز وشعاع  $]-3;5]$
- 2- حدد مجالا مفتوحا مركزه 2- وشعاعه 3
- 3- حدد مجالا مغلقا مركزه 1 و أحد طرفيه  $\frac{-3}{2}$

### 4- القيمة المطلقة والمجالات

#### مبرهنة

ليكن  $x$  و  $a$  من  $\mathbb{R}$  و  $r \in \mathbb{R}_+^*$

$a-r \leq x \leq a+r$  تكافئ  $|x-a| \leq r$

$$[a-r; a+r] = \{x \in \mathbb{R} / |x-a| \leq r\}$$

مجال مغلق مركزه  $a$  و شعاعه  $r$

#### نتيجة

ليكن  $x$  و  $a$  من  $\mathbb{R}$  و  $r \in \mathbb{R}_+^*$

$a-r < x < a+r$  تكافئ  $|x-a| < r$

$$]a-r; a+r[ = \{x \in \mathbb{R} / |x-a| < r\}$$

مجال مفتوح مركزه  $a$  و شعاعه  $r$

#### نتيجة

ليكن  $x$  و  $a$  من  $\mathbb{R}$  و  $r \in \mathbb{R}_+^*$

$x \leq a-r$  أو  $x \geq a+r$  تكافئ  $|x-a| \geq r$

$$\{x \in \mathbb{R} / |x-a| \geq r\} = ]-\infty; a-r] \cup [a+r; +\infty[$$

### تمرين

حدد المجموعات التالية

$$A = \{x \in \mathbb{R} / |x-3| \leq 2\} \text{ و } B = \{x \in \mathbb{R} / |x+4| < 7\} \text{ و } C = \{x \in \mathbb{R} / |x-1| \geq 2\}$$

### IV- التآطير و التقريب

#### (A) التآطير

#### 1- أنشطة

- أ- حدد مجالا مفتوحا سعته  $10^{-2}$  يحتوي على  $\frac{2}{3}$
- ب- علما أن  $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$
- حدد مجالا مغلقا يحتوي على  $-3\sqrt{2}$  سعته  $7 \cdot 10^{-2}$

## 2- تعريف

ليكن  $(a;b) \in \mathbb{R}^2$  حيث  $a < b$   
كل متفاوتة من المتفاوتات المزدوجة  $a \leq x \leq b$  و  $a < x \leq b$  و  $a \leq x < b$  و  $a < x < b$  تسمى  
تأطيرا للعدد  $x$  سعته  $b - a$

### أمثلة

$$0 < \frac{2}{3} < 1 \quad \text{تأطير للعدد } \frac{2}{3} \text{ سعته } 1$$

$$0,666 < \frac{2}{3} < 0,667 \quad \text{تأطير للعدد } \frac{2}{3} \text{ سعته } 10^{-3}$$

## تمارين

### تمرين 1

1- ليكن  $-3 < x < 5$  ;  $2 < y < 4$  أطر  $x^2 + 3x - \frac{1}{y} - 5$

2- ليكن  $|x| < 1$  ;  $|y| < 1$

أ- أطر  $\frac{1}{x + y + xy + 4}$

ب- أطر  $(x + 1)(y + 1)$  . أنشر  $(x + 1)(y + 1)$

استنتج تأطيرا للعدد  $\frac{1}{x + y + xy + 4}$

### تمرين 2

1- لنحدد تأطيرا للعدد  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$  سعته  $7 \cdot 10^{-3}$  علما أن  $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$

2- نعتبر  $-0,01 < y < 0,02$  ,  $1,53 < x < 1,54$

حدد تأطيرا للعدد  $xy$  سعته  $6 \cdot 10^{-2}$

### تمرين 3

ليكن  $0,2 < y < 0,4$  ,  $1,2 < x < 1,4$

حدد تأطيرا للعدد  $\frac{y}{x}$  سعته  $0,20$

## (B) التقريب

### 1- تعريف

ليكن  $a \leq x \leq b$  أو  $a < x \leq b$  أو  $a \leq x < b$  أو  $a < x < b$  تأطيرا للعدد  $x$   
سعته  $b - a$

العدد  $a$  يسمى تقريبا للعدد  $x$  إلى  $b - a$  بتفريط  
العدد  $b$  يسمى تقريبا للعدد  $x$  إلى  $b - a$  بإفراط

### أمثلة

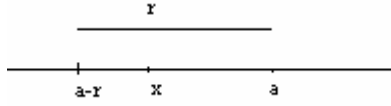
$$3,14 < \pi < 3,15 \quad \text{لدينا}$$

العدد  $3,14$  تقريبا للعدد  $\pi$  إلى  $10^{-2}$  بتفريط

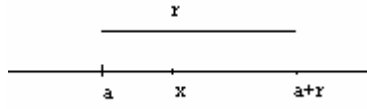
العدد  $3,15$  تقريبا للعدد  $\pi$  إلى  $10^{-2}$  بإفراط

## خاصية

ليكن  $a$  و  $x$  عددين حقيقيين و  $a$  عددا حقيقيا موجب قطعاً  
العدد  $a$  تقرب للعدد  $x$  إلى  $r$  بإفراط إذا وفقط إذا كان  $a - r \leq x \leq a$



العدد  $a$  تقرب للعدد  $x$  إلى  $r$  بتفريط إذا وفقط إذا كان  $a \leq x \leq a + r$



**تمرين** لنحدد تقريبات للعدد  $\frac{22}{3}$  إلى  $10^{-3}$  بإفراط

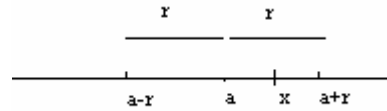
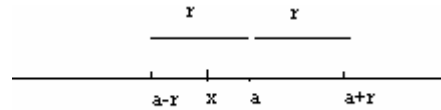
**تمرين** ليكن  $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

إذا علمت أن 2,236 تقرب للعدد  $\sqrt{5}$  إلى  $10^{-3}$  بتفريط فأعط تقرب للعدد  $x$  إلى  $10^{-3}$  بتفريط ثم بإفراط

## 2- قيمة مقربة

### تعريف

ليكن  $x$  عددا حقيقيا و  $r$  عددا حقيقيا موجبا  
كل عدد حقيقي  $a$  يحقق  $|x - a| \leq r$  يسمى قيمة مقربة (أو تقريبا) للعدد  $x$  إلى  $r$   
(أو بالدقة  $r$ )



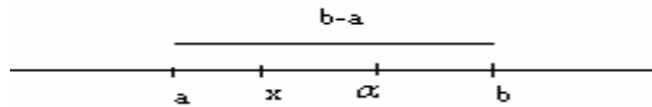
## أمثلة

$$\left| \frac{22}{7} - 3,14 \right| \leq 0,003 \quad \text{إذن } 3,14 \text{ تقرب للعدد } \frac{22}{7} \text{ إلى } 3 \cdot 10^{-3}$$

## خاصية

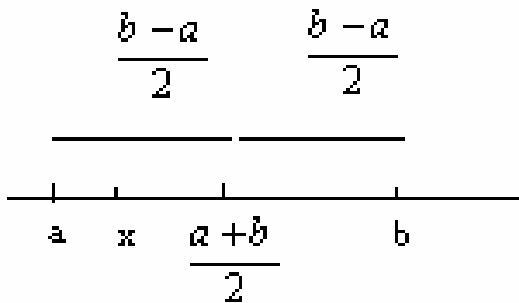
ليكن  $x \in [a, b]$

كل عدد  $\alpha$  من  $[a, b]$  تقرب للعدد  $x$  إلى  $b - a$



## ملاحظة

إذا كان  $x \in [a, b]$  فإن  $\frac{a+b}{2}$  تقرب للعدد  $x$  إلى  $\frac{b-a}{2}$



## مثال

$$1,41 < \sqrt{2} < 1,42$$

العدد 1,415 تقرب للعدد  $\sqrt{2}$  إلى 0,005

## تمرين

لنبين أن -0,14 تقرب للعدد  $\frac{-1}{7}$  بالدقة  $5 \cdot 10^{-3}$

### 3- التقريبات العشرية أ- استعمال المحسبة لتحديد تقريبات عشرية

#### ب- التقريب العشري

ليكن  $x$  عددا حقيقيا و  $n$  عددا صحيحا طبيعيا  
نقبل انه يوجد عدد صحيح نسبي و حيد  $p$  حيث  $10^{-n} p \leq x < 10^{-n} (p+1)$   
العدد  $10^{-n} p$  **تقريب العشري** للعدد  $x$  بتفريط إلى  $10^{-n}$  ( أو من الرتبة  $n$  )  
العدد  $10^{-n} (p+1)$  **تقريب العشري** للعدد  $x$  بإفراط إلى  $10^{-n}$  ( أو من الرتبة  $n$  )

#### اصطلاح:

التقريب العشري من الرتبة  $n$  الأكثر قربا من العدد  $x$  يسمى الجبر (*arrondi*) من الرتبة  $n$  للعدد  $x$

**مثال** لدينا  $666 \cdot 10^{-3} < \frac{2}{3} < 667 \cdot 10^{-3}$

العدد 0,666 تقريب العشري للعدد  $\frac{2}{3}$  من الرتبة 3 بتفريط

العدد 0,667 تقريب العشري للعدد  $\frac{2}{3}$  من الرتبة 3 بإفراط

نلاحظ أن  $\frac{2}{3} - 0,666 = \frac{0,002}{3}$  ;  $0,667 - \frac{2}{3} = \frac{0,001}{3}$

0,667 الجبر للعدد  $\frac{2}{3}$  من الرتبة 3

#### تمرين

1,24 التقريب العشري للعدد  $x$  من الرتبة 2 بتفريط و  $-0,31 < y < -0,25$

أطر  $\frac{y}{x}$  تأطيرا سعته 0,05