

القدرات المستهدفة

- حساب نهايات الدوال الحدودية و الدوال الجذرية و الدوال اللاجذرية .
- حساب نهايات الدوال المثلثية البسيطة باستعمال الدوال الإعتيادية .

النهايات باستعمال التأطيرتمرين رقم 1 :

$$\text{لنبين أن } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 3x = 0$$

نعتبر المجال المفتوح المنقط الذي مركزه 0 ،]-1,1[.

$$\text{لدينا : } |x^2 + 3x| = |x||x+3| \text{ و بما أن } -1 < x < 1 \text{ فإن } 2 < x+3 < 4 \text{ إذن } |x+3| < 4 \text{ ومنه } |x^2 + 3x| < 4|x|$$

$$\text{و بما أن } \lim_{x \rightarrow 0} 4|x| = 0 \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 3x = 0 \text{ حسب الخاصية 2 .}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 3x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{3+x^2} = 0 \text{ بين بالمثل أن}$$

تمرين رقم 2 :

$$\text{لنبين أن } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3 \text{ بحيث } f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

لذلك سوف نطبق الخاصية 3 :

$$|f(x) - 3| = \left| \frac{x+1}{x-1} - 3 \right| = \left| \frac{x+1-3x+3}{x-1} \right| = \left| \frac{-2x+4}{x-1} \right| = \left| \frac{-2(x-2)}{x-1} \right| = 2 \left| \frac{x-2}{x-1} \right|$$

نعتبر المجال المنقط الذي مركزه 2 $\left] \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \right[$

$$\text{بما أن } x \in \left] \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \right[\text{ فإن } \frac{3}{2} < x < \frac{5}{2} \text{ ومنه } \frac{1}{2} < x-1 < \frac{3}{2} \text{ وبالتالي } \frac{1}{2} < |x-1| < 2 \text{ ومنه } \frac{1}{|x-1|} < 2 \text{ إذن } 2 \left| \frac{x-2}{x-1} \right| < |x-2|$$

$$\text{و نعلم أن } \lim_{x \rightarrow 2} |x-2| = 0 \text{ إذن } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x-1} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + 4x - 3 = 2 \text{ بين بالمثل أن}$$

تمرين رقم 3 :

$$\text{لنبين أن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x^2 + 5} = 0$$

$$\text{لدينا : } \frac{4}{x^2 + 5} < \frac{4}{x^2} \text{ لأن } x^2 + 5 > x^2$$

$$\text{و نعلم حسب الخاصية 2 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x^2} = 0 \text{ ومنه فإن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x^2 + 5} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x^2 + 5} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0 \text{ بين بالمثل أن}$$

تمرين رقم 4 :

$$\text{لنبين أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \text{ بحيث } f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 4}$$

$$|f(x) - 2| = \left| \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 4} - 2 \right| = \left| \frac{2x^2 - 1 - 2x^2 - 8}{x^2 + 4} \right| = \left| \frac{-9}{x^2 + 4} \right| = \frac{9}{x^2 + 4}$$

$$\text{و لدينا } \frac{9}{x^2 + 4} < \frac{9}{x^2} \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9}{x^2} = 0 \text{ إذن حسب التعريف } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 4} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 4} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 1}{x^2 + 2} = 3 \quad \text{بين بالمثل أن}$$

تمرين رقم 5 :

$$f(x) = \frac{x+1}{-x} \quad \text{لنبين أن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \text{ بحيث}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x) = -1 \text{ بتطبيق التعريف سوف نبين أن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x) = -1 \quad \text{فإن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ وبما أن } |f(-x) - (-1)| = \left| \frac{-x+1}{x} + 1 \right| = \left| \frac{-x+1+x}{x} \right| = \left| \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{x} \text{ لدينا}$$

ومنه $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x+1}{x} = -1$$

تمرين رقم 6 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} = +\infty \quad \text{لنبين أن}$$

$$\text{لدينا : } \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} \geq \frac{1}{x^2} \quad \text{لأن } \sqrt{1+x^2} \geq 1 \text{ لكل عدد حقيقي}$$

$$\text{و لدينا } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \text{ إذن } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1}{x^4} = +\infty \quad \text{بين بالمثل أن}$$

تمرين رقم 7 :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{(x-1)^2} = +\infty \quad \text{لنبين أن}$$

$$f(1+h) = \frac{3}{h^2} \quad \text{ونستنتج أن } f(x) = \frac{3}{(x-1)^2} \text{ نضع}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(1+h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3}{h^2} = +\infty \quad \text{ومنه}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{(x-1)^2} = +\infty$$

تمرين رقم 8 :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 + 2x = +\infty \quad \text{لنبين أن}$$

$$\text{لدينا : } x^4 + 2x = x(x^3 + 2) \text{ و بما أن النهاية بجوار } +\infty \text{ نفترض أن } x > 1 \text{ وبالتالي } x^3 + 2 > 1 \text{ ومنه } x^4 + 2x = x(x^3 + 2) > x$$

$$\text{ونعلم أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ إذن } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 + 2x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 + 2x = +\infty$$

النهايات بطريقة التعويض

نهاية الدوال الحدودية :

1 - النهاية في عدد حقيقي هي صورته بالدالة :

$$\lim_{x \rightarrow 0} 3x^2 - 2x + 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 3x^2 - 2x + 4 = 3 \times 0^2 - 2 \times 0 + 4 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} 4x^2 + x - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} 4x^2 + x - 1 = 4 \times (-2)^2 + (-2) - 1 = 16 - 2 - 1 = 13$$

1 - النهاية في $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية الحد الذي لديه أكبر أس :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 - x - 5$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 - x - 5 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^5 - 2x^2 - 5x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^5 - 2x^2 - 5x = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^5 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^4 + 3x - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^4 + 3x - 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^4 = -\infty$$

نهاية الدوال الجذرية :

1 - لتحديد نهاية دالة جذرية في عدد حقيقي نعوض المجهول بـ العدد :

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x - 3}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x - 3}{x^2} = \frac{2(-1) - 3}{(-1)^2} = \frac{-5}{1} = -5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2x + 3}{(x - 2)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2x + 3}{(x - 2)^2} = \frac{-4 + 3}{0^2} = \frac{-1}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x + 1}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x + 1}{x - 1} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

2 - التعويض يمكن أن يعطينا شكل غير محدد :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$\text{شكل غير محدد} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2$$

3 - النهاية في $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية خارج الحدين الأكبر أس :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2x}{2x^2 + 5}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2x}{2x^2 + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^5 - 2x^2}{2x^2 + 5x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^5 - 2x^2}{2x^2 + 5x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^5}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3}{2} = -\infty$$

نهاية الدوال اللاجذرية :

1 - لتحديد نهاية دالة لا جذرية في عدد حقيقي نعوض المجهول بـ العدد :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x + 1} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 2} = \frac{\sqrt{3}}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 2} = \frac{0}{0}$$

شكل غير محدد

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x + 2)\sqrt{x^2 - 4}}{(x + 2)(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x + 2)\sqrt{x^2 - 4}}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x + 2)}{\sqrt{x^2 - 4}} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

2 - النهاية في $+\infty$ أو $-\infty$ لدالة لاجذرية :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2} = \sqrt{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2} - 2x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2} - 2x = +\infty - \infty$$

شكل غير محدد

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2} - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} - 2 \right)$$

$$\sqrt{x^2 + 2} = x \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} \text{ لأن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} - 2 = \sqrt{1 + 0^+} - 2 = 1 - 2 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2} - 2x = -\infty \text{ إذن } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} - 2 \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{x} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

شكل غير محدد

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} = \sqrt{1 + 0^+} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x$$

التعويض

طريقة التعميل

التعويض

التعميل

شكل غير محدد

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x = +\infty - \infty$$

التعويض

شكل غير محدد $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1 \right) = +\infty \times 0$

التعميل

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{+1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

المرافق

نهاية الدوال المثلثية :

نعمد كثيرا على النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{4x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{4x} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 5x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \frac{x}{5x} \times \frac{5x}{\sin 5x} = 1 \times \frac{1}{5} \times 1 = \frac{1}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 4 \times \frac{1 - \cos 2x}{(2x)^2} = 4 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{(2x)^2} = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^4}{\cos x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^4}{\cos x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2(x^2)^2}{1 - \cos x^2} = -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2)^2}{1 - \cos x^2} = -2 \times 2 = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \times \frac{\sin 2x}{2x} = 2 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 2 \times 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = 1^2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{4x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \times \frac{3x}{4x} \times \frac{4x}{\sin 4x} = 1 \times \frac{3}{4} \times 1 = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 4 \times \frac{1 - \cos(2x)}{(2x)^2} = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \quad : \quad t = \frac{\pi}{2} - x \text{ ونضع } x \text{ بتغيير المتغير}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-5}{x} + x^2 \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-5}{x} + x^2 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5}{x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = 0 + \infty = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x}{|x-1| - 1}$$

$$\text{شكل غير محدد} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x}{|x-1| - 1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 2x}{|x-1| - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 2x}{x-1-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 2x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 2x}{|x-1| - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 2x}{-x+1-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 2x}{-x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x(x-2)}{-x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -(x-2) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x}{|x-1| - 1} = 1 \quad \text{إذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$$

شكل غير محدد

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = +\infty - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1) - (x-1)}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} - 2}{x-1}$$

شكل غير محدد

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} - 2}{x-1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} - 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{3x+1} - 2)(\sqrt{3x+1} + 2)}{(x-1)(\sqrt{3x+1} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+1-4}{(x-1)(\sqrt{3x+1} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x-3}{(x-1)(\sqrt{3x+1} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)}{(x-1)(\sqrt{3x+1} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{\sqrt{3x+1} + 2} = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \tan\left(\frac{\pi}{2} x\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \tan\left(\frac{\pi}{2} x\right) = \lim_{t \rightarrow 0} t \tan\left(\frac{\pi}{2}(t+1)\right) = \lim_{t \rightarrow 0} t \tan\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t}{\tan\left(\frac{\pi}{2}t\right)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2} \tan\left(\frac{\pi}{2}t\right)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-2}{\pi \tan\left(\frac{\pi}{2}t\right)} = \frac{-2}{\pi}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}(x\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)} = -1$$

تمارين إضافية :

حدد النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} \frac{x^2 - 2}{x + \sqrt{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - 1}{-x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{7x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\tan 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x - 1}{x^2 - 4x + 5}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x-1}}{x^2 - x + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} 5x^2 + 7x - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^2 + 5x + 4$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + x + 1}{1 - x^5}$$

النهايات بالتأطير

تمرين رقم 1 :

نعتبر الدالة f المعرفة على الشكل : $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$

1 - بين أن $|f(x)| \leq \frac{1}{2}|x|$ لكل $x \in \mathbb{R}^*$

2 - ما ذا نستنتج ؟

الحل :

1 - ليكن $x \in \mathbb{R}^*$ لدينا :

$$|f(x)| = \left| \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} \right| = \left| \frac{(\sqrt{1+x^2} - 1)(\sqrt{1+x^2} + 1)}{x(\sqrt{1+x^2} + 1)} \right| = \left| \frac{1+x^2 - 1}{x(\sqrt{1+x^2} + 1)} \right| = \left| \frac{x}{\sqrt{1+x^2} + 1} \right| = \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2} + 1}$$

و بما ان لكل $x \in \mathbb{R}^*$ لدينا $\sqrt{1+x^2} \geq 1$ إذن $\sqrt{1+x^2} + 1 \geq 2$ ومنه $\frac{1}{\sqrt{1+x^2} + 1} \leq \frac{1}{2}$

و بالتالي $\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2} + 1} \leq \frac{1}{2}|x|$ ومنه $|f(x)| \leq \frac{1}{2}|x|$ لكل $x \in \mathbb{R}^*$

2 - بما أن $|f(x)| \leq \frac{1}{2}|x|$ و $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

تمرين رقم 2 :

نعتبر الدالة f المعرفة على الشكل : $f(x) = \sqrt{1+x^2} - x$

1 - بين أن $f(x) \leq \frac{1}{2x}$ لكل $x \in \mathbb{R}^{**}$

2 - ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

الحل :

$$f(x) = \sqrt{1+x^2} - x = \frac{(\sqrt{1+x^2} - x)(\sqrt{1+x^2} + x)}{\sqrt{1+x^2} + x} = \frac{1+x^2 - x^2}{\sqrt{1+x^2} + x} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + x} \quad \text{1 - ليكن } x \in \mathbb{R}^{**} \text{ لدينا :}$$

و بما أن $x \in \mathbb{R}^{**}$ فإن $1+x^2 > x^2$ ومنه $\sqrt{1+x^2} > x$ إذن $\sqrt{1+x^2} + x > 2x$ و بالتالي $\frac{1}{\sqrt{1+x^2} + x} < \frac{1}{2x}$

إذن $f(x) < \frac{1}{2x}$

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr.

2 - بما ان $0 < f(x) < \frac{1}{2x}$ لكل $x \in \mathbb{R}^{**}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

أجب بنفس الطريقة على :

تمرين رقم 3 :

نعتبر الدالة f المعرفة على الشكل : $f(x) = \frac{-2x^2 + x - 6}{x^2 + 3}$

1 - بين أن $|f(x) + 2| \leq \frac{1}{x}$ لكل $x \in \mathbb{R}^*$

2 - ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

تمرين رقم 4 :

نعتبر الدالة f المعرفة على الشكل : $f(x) = x \sin x + 2x$

1 - بين أن $f(x) > x$ لكل $x \in \mathbb{R}^{*+}$

2 - ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

الأستاذ : الحبان	النهايات والإتصال	الأولى بكالوريا علوم تجريبية
<p>التمرين 5 : أحسب النهايات التالية :</p> <p>(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$; (vii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$;</p> <p>(ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$; (viii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$;</p> <p>(iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \tan\left(\sqrt{x^2 + \frac{\pi^2}{4}} - \frac{\pi}{4}\right)$; (ix) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\cos x - \sqrt{3} \sin x}{x - \frac{\pi}{6}}$;</p> <p>(iv) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{\pi \sin x}{x}\right)$; (x) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{x - \frac{\pi}{2}}$;</p> <p>(v) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(2x)}{\sqrt{1 - \cos x}}$; (xi) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$;</p> <p>(vi) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$; (xii) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{(2x - \pi)^2}$;</p>	<p>التمرين 1 : أحسب النهايات التالية :</p> <p>(i) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{x-1}$; (vii) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - 2x}$;</p> <p>(ii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+8} - 3}{x^5 - 5x + 6}$; (viii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x - 4}{2x^2 - 2x}$;</p> <p>(iii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$; (ix) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 2}{3x^2 - 6x}$;</p> <p>(iv) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x}$; (x) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 3\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 1}$;</p> <p>(v) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + x}$; (xi) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x^2+4} - 4}{x-2}$;</p> <p>(vi) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$; (xii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{4x^2+5} - 3}$;</p>	<p>التمرين 2 : أحسب النهايات التالية :</p> <p>(i) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$; (vii) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-1}{ x-2 }$;</p> <p>(ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+2x}{x^2-x}$; (viii) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1-2x}{(x+3)^2}$;</p> <p>(iii) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x$; (ix) $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{4-2x}{x^2-4x+4}$;</p> <p>(iv) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x$; (x) $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{x^2+5x-6}{x^3-4x}$;</p> <p>(v) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1+2\sqrt{1-x}}{(x-1)(1-\sqrt{1-x})}$; (xi) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x^3+x}{x^2-1}$;</p> <p>(vi) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+ x }}$; (xii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-1} - \frac{x^2}{x^2-1}$;</p>
<p>التمرين 6 : أحسب النهايات التالية :</p> <p>(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{(x+3)^2}$; (vii) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 - 2x^2$;</p> <p>(ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^2+x+2}}{x}$; (viii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2+x+1}{x+2}$;</p> <p>(iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+3}{x+1} - x$; (ix) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{2x^2+1} - \sqrt{x^2-x-2}$;</p> <p>(iv) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+\cos x}{2x}$; (x) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2-2x+3}}{\sqrt{2-x}}$;</p> <p>(v) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}$; (xi) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2-2x} + x - 1$;</p> <p>(vi) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-9}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$; (xii) $\lim_{x \rightarrow \infty} x + \sin x$;</p>	<p>التمرين 3 : أحسب النهايات التالية :</p> <p>(i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$; (v) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2-x)}{x-1}$;</p> <p>(ii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1}$; (vi) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3} \sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{6}}$;</p> <p>(iii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(\sqrt{x})}{\sin x}$; (vii) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\tan(x^2-3x)}{x-3}$;</p> <p>(iv) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2 \sin x}{x^3}$; (viii) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos 3x}$;</p>	<p>التمرين 7 : أحسب النهايتين التاليتين :</p> <p>(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sin^2\left(\frac{x}{3}\right)}$; (ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{x^2}$;</p>
<p>التمرين 8 :</p> <p>نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $I = \mathbb{R}^+ - \{1\}$ بما يلي :</p> $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{2}}{x - \sqrt{x}}$ <p>1. أ- أحسب النهاية : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$</p> <p>ب- أحسب النهاية : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$</p> <p>2. أ- أحسب النهاية : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$</p>	<p>التمرين 4 : أحسب النهايتين التاليتين :</p> <p>(i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{\tan x}$; (ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 2x}$;</p>	<p>التمرين 8 :</p> <p>نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $I = \mathbb{R}^+ - \{1\}$ بما يلي :</p> $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{2}}{x - \sqrt{x}}$ <p>1. أ- أحسب النهاية : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$</p> <p>ب- أحسب النهاية : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$</p> <p>2. أ- أحسب النهاية : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$</p>

