

## الحساب المثلثي (ج3)

1- صيغ التحويل

1- تحويل  $\cos(x-y)$  و  $\cos(x+y)$

نعتبر  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  معلم متعامد ممنظم مرتبط بالدائرة المثلثية (C) ليكن  $x$  و  $y$  عددين حقيقيين. ولتكن  $M$  و  $M'$  نقطتين أفوليهما المنحنيين  $x$  و  $y$  على التوالي ومنه  $M(\cos x; \sin x)$  و  $M'(\cos y; \sin y)$

$$\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$

$$\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = OM \cdot OM' \cos(x-y) \quad \text{فان } (\overline{OM}; \overline{OM'}) \equiv x-y \quad [2\pi]$$

$$\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = \cos(x-y) \quad \text{فان } OM = OM' = 1$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$

تحويل  $\cos(x+y)$

$$\cos(x+y) = \cos(x-(-y))$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin(-y)$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

2- تحويل  $\sin(x+y)$  و  $\sin(x-y)$

$$\sin(x-y) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (x-y)\right)$$

$$\sin(x-y) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + y\right)$$

$$\sin(x-y) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos y - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$$

تحويل  $\sin(x+y)$

خلاصة

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$$

3- تحويل  $\tan(x+y)$  و  $\tan(x-y)$

ليكن  $x$  و  $y$  عددين حقيقيين بحيث  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  و  $y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  و  $x+y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  حيث  $k \in \mathbb{Z}$

و  $\tan x \cdot \tan y \neq 1$ .

$$\tan(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}$$

$$\tan(x+y) = \frac{\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y}{\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y}$$

$$\tan(x+y) = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

تحويل  $\tan(x-y)$

$$\tan(x-y) = \tan(x+(-y))$$

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x + \tan(-y)}{1 - \tan x \tan(-y)}$$

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

خلاصة

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

تمرين

أحسب النسب المثلثية للعدد  $\frac{7\pi}{12}$  (لاحظ أن  $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}$ )

تمرين

أكتب  $\cos x + \sin x$  بدلالة  $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

11- نتائج

1- في صيغ التحويل السابقة بوضع  $x = y$  نحصل على

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

تمرين

أحسب النسب المثلثية للعدد  $\frac{\pi}{8}$

تمرين

بين أن  $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$  و  $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$

2- تحديد النسب المثلثية للعدد  $x$  بدلالة  $t = \tan \frac{x}{2}$

لدينا  $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}$$

نقسم البسط و المقام بالعدد  $\cos^2 \frac{x}{2}$  ومنه  $\cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$  أي  $\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$

باستعمال العلاقات  $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}$  و نفس الطريقة نحصل على  $\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$

خلاصة

$\tan \frac{x}{2} = t$ بوضع		
$\tan x = \frac{2t}{1 - t^2}$ و	$\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$ و	$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$

III - تحويل مجموع إلى جداء  
لدينا

$$\cos(x + y) + \cos(x - y) = 2 \cos x \cos y$$

$$\cos(x + y) - \cos(x - y) = -2 \sin x \sin y$$

$$\sin(x + y) + \sin(x - y) = 2 \sin x \cos y$$

$$\sin(x + y) - \sin(x - y) = 2 \cos x \sin y$$

بوضع  $x + y = p$  و  $x - y = q$  أي أن  $x = \frac{p + q}{2}$  و  $y = \frac{x - y}{q}$

نحصل على النتائج

$\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos \frac{p + q}{2} \cos \frac{p - q}{2}$
$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p + q}{2} \sin \frac{p - q}{2}$
$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p + q}{2} \cos \frac{p - q}{2}$
$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p + q}{2} \sin \frac{p - q}{2}$

تمرين  
أكتب  $\cos 3x + \cos 7x$  على شكل جداء

تمرين

في مثلث مثلث  $ABC$

بين أن  $\sin \hat{A} + \sin \hat{B} + \sin \hat{C} = 4 \cos \frac{\hat{A}}{2} \times \cos \frac{\hat{B}}{2} \times \cos \frac{\hat{C}}{2}$

تمرين

بين أن  $\sin^2 \frac{5x}{2} - \cos^2 \frac{3x}{2} = -\cos 4x \cdot \cos x$

VI - تحويل جداء إلى مجموع

مما سبق نستنتج أن

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2} [\cos(x+y) - \cos(x-y)]$$

$$\cos x \sin y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) - \sin(x-y)]$$

**تمرين**

أكتب على شكل مجموع الجداء:  $\sin 2x \cdot \sin 3x \cdot \sin 5x$

**V- المعادلة**  $a \cos x + b \sin x + c = 0$

**1- تحويل**  $a \cos x + b \sin x$

ليكن التعبير  $a \cos x + b \sin x$  حيث  $a \neq 0$  و  $b \neq 0$  نعلم أنه يوجد  $\alpha$  من  $]-\pi; \pi]$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{array} \right. \text{ حيث}$$

نضع  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$  ومنه  $a \cos x + b \sin x = r(\cos \alpha \cos x + \sin \alpha \sin x)$

$$a \cos x + b \sin x = r \cos(x - \alpha)$$

**2- حل المعادلة**  $(E): a \cos x + b \sin x + c = 0$

حيث  $a \neq 0$  و  $b \neq 0$

لدينا  $a \cos x + b \sin x + c = 0$  ومنه  $r \cos(x - \alpha) = -c$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ و } \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{array} \right. \text{ حيث}$$

و بالتالي  $\cos(x - \alpha) = \frac{-c}{r}$

لدينا

$$-1 \leq \frac{-c}{r} \leq 1 \Leftrightarrow \left| \frac{c}{r} \right| \leq 1$$

$$\Leftrightarrow c^2 \leq r^2$$

$$\Leftrightarrow c^2 \leq a^2 + b^2$$

و منه نستنتج أن:

\*- إذا كان  $c^2 \leq a^2 + b^2$  فإن حلول المعادلة  $(E)$  هي:  $x = x_0 + \alpha + 2k\pi$

أو  $x = -x_0 + \alpha + 2k\pi$

$$\text{حيث } k \in \mathbb{Z} \text{ و } \cos x_0 = \frac{-c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

\*- إذا كان  $c^2 > a^2 + b^2$  فإن المعادلة  $(E)$  لا تقبل حلا.

**مثال** حل المعادلة  $\cos x + \sqrt{3} \sin x = -1$   $x \in \mathbb{R}$

$$r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \text{ لدينا}$$

$$\cos x + \sqrt{3} \sin x = 2 \left[ \frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \right] \text{ ومنه}$$

$$\cos x + \sqrt{3} \sin x = 2 \left[ \cos \frac{\pi}{3} \cos x + \sin \frac{\pi}{3} \sin x \right]$$

$$\cos x + \sqrt{3} \sin x = 2 \cos \left( x - \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\cos x + \sqrt{3} \sin x = -1 \Leftrightarrow \cos \left( x - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{-1}{2} \text{ ومنه}$$

### ملاحظة

لحل المعادلة  $a \cos x + b \sin x + c = 0$  في  $\mathbb{R}$ ، يمكن أن نضع  $\tan \frac{x}{2} = t$  بحيث  $x \neq \pi + 2k\pi$  و  $k \in \mathbb{Z}$

وبالتالي المعادلة السابقة تصبح

$$\begin{cases} a \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} + b \cdot \frac{2t}{1+t^2} + c = 0 \\ \tan \frac{x}{2} = t \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

نحل المثال باستعمال الطريقة الثانية  
المعادلة السابقة تصبح

$$\begin{cases} \frac{1-t^2}{1+t^2} + \sqrt{3} \frac{2t}{1+t^2} = -1 & (E) \\ t = \tan \frac{x}{2} \quad x \neq \pi + 2k\pi \end{cases}$$

$$(E) \Leftrightarrow 1 - t^2 + 2\sqrt{3}t = -1 - t^2$$

$$(E) \Leftrightarrow t = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{و بالتالي } \tan \frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ومنه } \frac{x}{2} = \frac{-\pi}{6} + k\pi$$

$$S = \left\{ \frac{-\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ ومنه } x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

### 3- حل المتراجحات المثلثة

حل المتراجحات التالية

$$x \in [-\pi; 2\pi] \quad \cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x > -\sqrt{2}$$

$$x \in [-\pi; \pi] \quad \sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x \geq 0$$

$$x \in [0; 2\pi[ \quad \tan 2x \leq \tan x$$