الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين جهة فـــــاس- بولمـــــان نيـــــابة صـــفـــرو	**الامتحان التجريبي للباكالوريا** **2009-2010** **مـــادة الريـــاضيـــات**	**الثانيـــة علوم رياضية أ و ب** مدة الإنجاز: 4 ساعات المعامل : 9

التمريـــــن الأول — 4.25

نعتبر المصفوفتين $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ و $J=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$

ونعتبر المجموعة $E=\left\{M_{(a,b)}=aI+bJ \ / \ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$

1) a) بين أن $(E\ ,+\ ,\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي . — 0.25

b) بين أن الأسرة $(I\ ,J)$ أساس في E . — 0.5

2) a) بين أن $J^2=2J$ — 0.25

b) بين أن $M_{(a,b)}\ .\ M_{(a',b')}=M_{(a\,a',\ ab'+b\,a'+2bb')}$. — 0.25

3) a) بين أن $(E\ ,+\ ,\times)$ حلقة تبادلية وواحدية . — 0.5

b) بين أن $M_{(a,b)}$ تقبل مقلوبا في $(E\ ,+\ ,\times)$ $\Leftrightarrow$ ($a\neq 0$ و $a\neq -2b$): $(\forall M_{(a,b)}\in E)$ — 0.5

4) بين أن $(\forall n\in IN^*)\ :\ M_{(1,1)}^n=M_{(1,\frac{3^n-1}{2})}$ — 0.5

5) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x)=\dfrac{e^x-1}{2}$ ونضع $A(x)=M_{(1,\ h(x))}$

و نعتبر المجموع $H=\left\{\ A(x)\ /\ x\in IR\right\}$

a) بين أن $(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2): h(x)+h(y)+2h(x)h(y)=h(x+y)$. — 0.25

b) استنتج أن $(H\ ,\times)$ جزء مستقر من $(M_2(IR)\ ,\times)$ — 0.25

6) نعتبر التطبيق
$$\begin{array}{rccc}\psi\ :&(IR\ ,+)&\to&(H\ ,\times)\\&x&\to&A(x)\end{array}$$

a) بين أن ψ تشاكل تقابلي من $(IR\ ,+)$ نحو $(H\ ,\times)$. — 0.75

b) استنتج أن $(H\ ,\times)$ زمرة تبادلية . — 0.25

التمريـــــن الثـــــاني — 2.5

1) ليكن p عدد أولي فردي .

a) بين أنه $(\exists k\in\mathbb{N}^*): 2^k\equiv 1[p]$. — 0.25

b) ليكن $k\in\mathbb{N}^*$ بحيث $2^k\equiv 1[p]$. بين أن $(\forall n\in\mathbb{N})\ :\ k\ /\ n\Rightarrow 2^n\equiv 1[p]$ — 0.25

c) ليكن b أصغر عدد صحيح طبيعي غير منعدم يحقق $2^b\equiv 1[p]$.

ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ بحيث $2^n\equiv 1[p]$ و r باقي قسم n على b . — 0.75

بين أن $2^r\equiv 1[p]$ واستنتج أن $b\ /\ n$

2) ليكن q عدد أولي فردي و ليكن p عدد أولي بحيث $2^q\equiv 1[p]$.

a) بين أن p فردي . — 0.25

b) ليكن b أصغر عدد صحيح طبيعي غير منعدم يحقق $2^b\equiv 1[p]$. — 0.5

بين أن $b=q$.

c) بين أن $q\ /\ p-1$ ثم استنتج أن $p\equiv 1[q]$. — 0.5

3.25	**التمريـــن الثـــالث**
	ليكن m عددا عقديا مخالفا للعددين العقديين i و $-i$.
	ونعتبر المعادلة : $(E): z^2-(1+m)(1+i)z+i(m^2+1)=0$
0.5	1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .
	نعتبر الأعداد $u=m+i$ و $v=1+im$ ونعتبر النقط $A(u)$ و $B(v)$ و $M(m)$.
0.5	2) نفترض أن $m=e^{\theta}$ حيث $\theta \in \left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$
	حدد الشكل المثلثي لكل من العددين u و v
0 .25	3) a) بين أن $\frac{v}{u}\in\mathbb{R} \Leftrightarrow |m|=1$
0.25	b) حدد مجموعة النقط $M(m)$ التي يكون من أجلها O و A و B مستقيمية .
	4) نفترض أن $|m|=1$ و $m^2-(1-2i)m-1\neq 0$
0.5	a) بين أن $\frac{u^2}{m}\in i\mathbb{R}^*$
0.5	b) بين أنه يوجد عدد عقدي وحيد α بحيث $\alpha\neq m$ و $\frac{u^2-\alpha}{m-\alpha}=i$.
0.25	c) نعتبر النقط $\Omega(\alpha)$ و $C(u^2)$.
	بين أن النقط O و Ω و C و M متداورة . لتكن (C) الدائرة المحيطة بهذا الرباعي
0.5	d) ليكن R الدوران الذي مركزه Ω وزاويته $\frac{\pi}{2}$.
	بين أن $R(M)=C$ واستنتج العناصر المميز ة للدائرة (C) .

10	**التمريـــن الـــرابـــع**
	الجـــــــــزء الأول
	1) نعتبر الدالة φ المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $\boxed{\varphi(x)=\ln x-\frac{1}{x^2}}$
0.5	a) أحسب $\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$ واستنتج الفروع اللانهائية للمنحنى (C_φ) .
0.25	b) أدرس تغيرات الدالة φ وضع جدول تغيراتها .
0.5	c) بين أن المعادلة $\varphi(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α وأن $1<\alpha<e$.
0.25	d) أنشئ المنحنى (C_φ) .
	2) لكل $\lambda\in]0,+\infty[$ نعتبر الدالة f_λ المعرفة على $]-\lambda,+\infty[$ بما يلي :
	$\boxed{f_\lambda(x)=\frac{1}{\lambda+x}-\lambda\ln(\lambda+x)}$.
0.25	a) أحسب $\lim\limits_{x\to-\lambda^+}f_\lambda(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f_\lambda(x)$.
0.25	b) بين أن الدالة f_λ تناقصية قطعا على $]-\lambda,+\infty[$.
0.5	c) بين أن المعادلة $f_\lambda(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_λ في المجال $]-\lambda,+\infty[$ ، واستنتج إشارة $f_\lambda(x)$.
0.25	d) بين أن $(\forall\lambda>0): 1<\lambda+x_\lambda<e^{\frac{1}{\lambda}}$ ، واستنتج $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}(\lambda+x_\lambda)$.
0.5	e) بين أن $f_\lambda(0)=-\lambda\varphi(\lambda)$ واستنتج أن : $(\forall\lambda>0)\ :\ x_\lambda>0\Leftrightarrow\lambda<\alpha$
	ثم استنتج أن $x_1>0$.

الجـــــــــزء الثـــــاني

لكل $\lambda \in]0,+\infty[$ نعتبر الدالة g_λ المعرفة على $]-\lambda,+\infty[$ بما يلي :

$$g_\lambda(x) = e^{-\lambda x}\ln(\lambda + x)$$

و (C_λ) منحناها في م م م .

1) أحسب $\lim\limits_{x\to -\lambda^+} g_\lambda(x)$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} g_\lambda(x)$ ، واستنتج الفروع اللانهائية للمنحنى (C_λ) . 0.5

2) بين أن الدالة g_λ قابلة للاشتقاق على $]-\lambda,+\infty[$ وأن $(\forall x > -\lambda) : g'_\lambda(x) = e^{-\lambda x} f_\lambda(x)$ 0.25

3) استنتج تغيرات الدالة g_λ وضع جدول تغيراتها . 0.25

4) a) ضع جدول تغيرات الدالة g_1 . 0.25

b) حدد معادلة المماس لمنحنى الدالة g_1 عند النقط التي أفصولها 0 . 0.25

c) أنشئ المنحنى (C_1) . 0.5

5) لكل $n \in \mathbb{N}^*$ نضع $I_n = \int_0^1 g_n(x)\,dx = \int_0^1 e^{-nx}\ln(n+x)\,dx$.

a) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 0 \le I_n \le \frac{\ln(1+n)}{n}(1-e^{-n})$ 0.5

b) استنتج $\lim(u_n)$. 0.25

الجـــــــــزء الثـــــالث

نعتبر الدالة F المعرفة على $]-1,+\infty[$ بما يلي :

$$F(x) = g_1(x) + \int_0^x g_1(t)dt = e^{-x}\ln(1+x) + \int_0^x e^{-t}\ln(1+t)dt$$

1) بين باستعمال مكاملة بالأجزاء أن $(\forall x \in]-1,+\infty[) : F(x) = \int_0^x \frac{e^{-t}}{1+t}dt$. 0.5

2) a) بين أن F قابل للاشتقاق على $]-1,+\infty[$.واستنتج تغيرات الدالة F . 0.25 0.25

b) بين أن $(\forall x \in [0,+\infty[) : |F'(x)| \le 1$.

3) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 \in]0,+\infty[\\ u_{n+1} = \frac{1}{2}F(u_n) \end{cases}$$

a) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > 0$. 0.25

b) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_{n+1}| \le \frac{1}{2}|u_n|$. 0.5

c) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة محددا نهايتها . 0.25

4) a) بين أن $(\forall x \in]-1,0[) : F(x) \le \ln(1+x)$ 0.25

b) استنتج $\lim\limits_{x\to -1^+} F(x)$. 0.25

5) a) بين أن $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln(1+x)}{\ln x} = 1$ وأن $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln(1+\ln x)}{\ln x} = 0$ 0.5

b) بين أن $(\forall x \ge 1) : 0 \le F(x) \le \int_0^{\ln x}\frac{1}{1+t}dt + \frac{1}{x}\int_{\ln x}^x \frac{1}{1+t}dt$ 0.5

c) استنتج أن $(\forall x \ge 1) : 0 \le F(x) \le \ln(1+\ln x) + \frac{1}{x}\left(\ln x - \ln(1+\ln x)\right)$ 0.25

d) استنتج $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{F(x)}{\ln(x)}$. 0.25