الامتحان التجريبي

ماي 2013

المستوى: الثانية باكلوريا – علوم رياضية | مدة الإنجاز: 4 ساعات | المادة: الرياضيات

تمرين 1 (4 نقط)

نعتبر المجموعة E بحيث : $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \neq 0\}$

ليكن * قانون التركيب الداخلي المعرف على المجموعة E بـ : $(a,b)*(c,d) = (\frac{a}{d} + bc, bd)$

1 - أ- هل * قانون تبادلي في E ؟ (0.25)

ب- بين أن * قانون تجميعي في E (0.5)

ج- بين أنه في (E,*) يوجد عنصر محايد تحدده (0.25)

د - حدد العناصر القابلة للمماثلة في (E,*) (0.5)

2- نعتبر المجموعة A بحيث : $A = \{(x,1) / x \in IR\}$

أ- بين أن A جزء مستقر في (E,*) (0.5)

ب- بين أن * تبادلي و تجميعي في A و أن في (A,*) يوجد عنصر محايد (0.5)

ج- بين أن جميع العناصر قابلة للمماثلة في (A,*) (0.25)

3 - نعتبر المجموعة B بحيث : $B = \{(0,x) / x \in]0,+\infty[\}$

ليكن f التطبيق من A نحو B المعرف بـ : $f((x,1)) = (0,e^x)$

أ- بين أن B جزء مستقر في (E,*) (0.25)

ب- بين أن f تشاكل (A,*) نحو (B,*) (0.5)

ج- بين أن f تقابل من A نحو B و حدد التقابل العكسي f^{-1} (0.5)

تمرين 2 (4 نقط)

a عدد عقدي بحيث $a \neq 1$ و $a \neq -1$

1- نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E): \quad iz^2 + (1-i)(1+ia)z + a^2 - 1 = 0$

أ- تحقق أن مميز المعادلة (E) هو : $\Delta = -2i(a+i)^2$ (0.5)

ب- استنتج أن حلي المعادلة (E) هما u و v بحيث : $u = i(1+a)$ و $v = 1-a$ (0.5)

2- في المستوى العقدي منسوب لمعلم متعامد ممنظم و مباشر أصله O نعتبر النقط :

$A(ia)$ و $B(u)$ و $C(v)$ و $D(u^2)$ و $E(w)$ حيث : $w = \dfrac{u^2 + a}{1 - i}$

أ- حدد مجموعة النقط $M(a)$ بحيث O و B و C مستقيمية (0.75)

ب- بين أن C هي صورة A بدوران زاويته $\dfrac{\pi}{2}$ محددا مركزه (0.5)

3- في كل ما يلي نفترض أن : $|a| = 1$ و أن : $a^2 + (2+i)a + 1 \neq 0$

أ- بين أن : $D \neq A$ و $E \neq A$ و $D \neq E$ (0.75)

ب- بين أن ADE مثلث قائم الزاوية و متساوي الساقين في E (0.5)

ج- بين أن O و A و D و E نقط متداورة (0.5)

تمرين 3 (2.5 نقطة)

نعتبر المتتالية $(a_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بـ : $\begin{cases} a_0 = 17 \\ a_{n+1} = 1 + (a_n - 1)^2 \; ; \; n \geq 0 \end{cases}$

1- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) : a_n \in \mathbb{N}^*$ (0.25)

2- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) : a_n \equiv 7 \quad [10]$ (0.5)

3- أ- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) : a_n = 2^{(2^{(n+2)})} + 1$ (0.5)

ب- استنتج أن: $(\forall n \in \mathbb{N}) : a_{n+4} = (a_n - 1)^{16} + 1$ (0.25)

4- أ- بين أن: $36^{16} \equiv 36 \quad [100]$ (0.5)

ب- استنتج أن: $(\forall n \in \mathbb{N}) : a_{4n+2} \equiv 37 \quad [100]$ (0.5)

تمرين 4 (9.5 نقطة)

الجزء الأول :

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بـ : $\begin{cases} f(x) = x - x\ln x \; ; \; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1- أ- بين أن f متصلة على $[0,+\infty[$ (0.5)

ب- اعط جدول إشارة $f(x)$ على $[0,+\infty[$ (0.5)

2- أ- ادرس قابلية اشتقاق f على اليمين في 0 (0.25)

ب- بين أن f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و احسب $f'(x)$ (0.5)

3 - اعط جدول تغيرات الدالة f (0.5)

4 - نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ بحيث : $u_n = \dfrac{e^{(n-1)}}{n^n}$

أ- تحقق أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n = e^{(f(n)-1)}$ (0.25)

ب- بين أن $(u_n)_{n\geq1}$ متتالية تناقصية قطعا ثم أن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ (0.75)

5 - ليكن n عددا من $\mathbb{N}^*$

- بين أن المعادلة $f(x) = u_n$ تقبل حلا وحيدا v_n في المجال $[1,e]$ (0.5)

6- بين أن المتتالية $(v_n)_{n\geq1}$ متقاربة ثم حدد نهايتها (0.75)

الجزء الثاني :

نعتبر الدالة F المعرفة على $[0,+\infty[$ بـ : $F(x) = \int_1^x f(t)dt$

و نرمز بـ (C) لمنحناها في معلم متعامد ممنظم .

1- بين أن F قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و احسب $F'(x)$ (0.5)

2- أ- باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن :

$$(\forall x \in]0,+\infty[) : \quad F(x) = \frac{3}{4}(x^2-1) - \frac{x^2}{2}\ln(x)$$ (0.75)

ب- استنتج أن : $F(0) = -\dfrac{3}{4}$ (0.5)

3- أ - اعط جدول تغيرات الدالة F (0.75)

ب- بين أن المعادلة $F(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]e,+\infty[$ و أن $4 < \alpha < 5$ (0.75)

4- أ- ادرس الفرع الانهائي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$ (0.5)

ب- ادرس تقعر المنحنى (C) و حدد نقطة انعطافه (0.5)

5- ارسم المنحنى (C) والمماس له في نقطة انعطافه (0.75)