I- عموميات:

1)- تعريف:

نسمي متتالية عددية كل تطبيق u من $\mathbb{N}$ (أو $\mathbb{N}^*$) نحو $\mathbb{R}$.

و لكل n من $\mathbb{N}$ العدد $u(n)$ يسمى الحد العام للمتتالية u و يرمز له ب u_n ، كما يرمز للمتتالية u بالرمز $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أو $(u_n)_{n\geq 0}$.

العدد u_0 يسمى الحد الأول و u_1 الحد الثاني . . . و بصفة عامة u_n هو الحد من الرتبة $n+1$.

2)- أمثلة:

$\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)_{n\geq 0}$ و $\left(3^n-2n\right)_{n\geq 0}$ متتاليتان عدديتان معرفتان على $\mathbb{N}$.

$\left(n\sin\frac{1}{n}\right)_{\geq 1}$ و $\left(\frac{2}{n\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$ متتاليتان عدديتان معرفتان على $\mathbb{N}^*$.

و المتتالية العددية $\left(\frac{n^2+1}{\sqrt{n-2}}\right)_{n\geq 3}$ معرفة على $I=\{n\in\mathbb{N}/n\geq 3\}$.

- **تمرين01:**

أحسب الحدود الستة الأولى للمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة ب : $u_n=\cos\frac{n\pi}{3}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

- **تمرين02:**

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعرفة ب : $u_0=9$ و $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+2$ لكل n من $\mathbb{N}$.

أ- أحسب الحدود التالية : u_1 و u_2 و u_3 و u_4 .

ب- بين بالترجع أن لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا : $u_n=6\left(\frac{1}{3}\right)^n+3$.

- **ملحوظة:**

يمكن تعريف متتالية عددية بإحدى الصيغتين :

الصيغة الصريحة: الحد العام u_n في هذه الحالة معبر عنه بدلالة n ، بمعنى أن $u_n=f(n)$ حيث f دالة عددية تحتوي مجموعة تعريفها على $\mathbb{N}$.

الصيغة الترجعية: الحد العام u_n معبر عنه بدلالة الحدود السابقة له u_{n-1} و u_{n-2} و . . ويجب على الأقل أن يكون الحد الأول للمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معلوما .

- **تمرين03:**

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي :

$u_0=10$ و $u_1=7$ و $u_{n+2}=2u_{n+1}-u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$.

أ- أحسب u_2 و u_3 و u_4 ، ثم تظنن الحد العام u_n بدلالة n مهما يكن n من $\mathbb{N}$.

ب- هل -2006 حد من حدود المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ ؟

3)- المتتاليات المكبورة و المتتاليات المصغورة:

- **تقديم:**

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي : $u_n=\frac{3n-4\sqrt{n}+1}{n+1}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}:-1<u_n<3$.

- **تعريف:**

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية عددية ، m و M عددين حقيقيين بحيث $m<M$.

نقول إن $(u_n)_{n\geq 0}$ مكبورة بالعدد M إذا كان : $\forall n\in\mathbb{N}:u_n\leq M$

و مصغورة بالعدد m إذا كان : $\forall n\in\mathbb{N}:m\leq u_n$.

و نقول إن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية محدودة إذا كانت مكبورة و مصغورة .

- **ملحوظة:** إذا كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية عددية حدودها موجبة فإنها مصغورة بالعدد 0 أما إذا كانت حدودها سالبة فإنها مكبورة ب 0 .

- **خاصية01:**

تكون المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ محدودة إذا وفقط إذا وجد α من $\mathbb{R}_+^*$ بحيث :

$\forall n\in\mathbb{N}:|u_n|\leq\alpha$.

- **تمرين04:**

نعتبر المتتاليات الثلاث المعرفة بما يلي :

$a_n=\sqrt{n}\left(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+1}\right)/n\geq 1$ و $b_n=n-\sqrt[3]{n^3-1}/n\geq 1$

و $c_n=\frac{2n^2-n+1}{n^2+1}/n\geq 0$.

بين أن (a_n) و (b_n) و (c_n) متتاليات محدودة .

- **تمرين05:**

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي : $u_0 = 1$ و $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 2}$.

أ- أحسب u_1 و u_2 و u_3 .

ب- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ مكبورة بالعدد $\sqrt{3}$ و مصغورة بالعدد 1

ثم إستنتج أنها محدودة .

4)- **المتتاليات الرتيبة:**

- **تعريف:**

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية عددية .

نقول إن $(u_n)_{n\geq 0}$ تزايدية قطعا إذا كان : $u_n < u_{n+1}$ لكل n من $\mathbb{N}$

و تناقصية قطعا إذا كان : $u_n > u_{n+1}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

ونقول إن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية رتيبة إذا كانت تزايدية أو تناقصية .

- **أمثلة:**

نعتبر المتتاليتين (a_n) و (b_n) بحيث :

$a_n = n + \dfrac{1}{n}$ لكل n من $\mathbb{N}^*$ و $b_n = n - 4^n$ لكل n من $\mathbb{N}$.

بين أن (a_n) و (b_n) رتيبتين قطعا .

- **خاصية02:**

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية عددية حدودها موجبة قطعا (على التوالي سالبة قطعا) .

تكون $(u_n)_{n\geq 0}$ تزايدية قطعا إذا وفقط إذا كان : $\forall n \in \mathbb{N} : \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$

(على التوالي : $\forall n \in \mathbb{N} : \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$)

و تكون $(u_n)_{n\geq 0}$ تناقصية قطعا إذا وفقط إذا كان : $\forall n \in \mathbb{N} : \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

(على التوالي : $\forall n \in \mathbb{N} : \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$) .

- **أمثلة:**

نعتبر المتتاليتين (a_n) و (b_n) بحيث : $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$ و $b_n = \dfrac{n}{\sqrt{n+1}}$ لكل n من $\mathbb{N}^*$

بين أن (a_n) و (b_n) رتيبتين قطعا .

- **خاصية03:**

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية عددية حيث : $u_n = f(n)$ و f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}_+$

إذا كانت f رتيبة قطعا على $\mathbb{R}_+$ فإن $(u_n)_{n\geq 0}$ تكون أيضا رتيبة قطعا و لها نفس رتابة الدالة f على $\mathbb{R}_+$.

- **مثال:**

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة ب : $u_n = \dfrac{-2n+5}{n+1}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

لدينا : $u_n = f(n)$ حيث $f(x) = \dfrac{-2x+5}{x+1}$ ، و بما أن f تناقصية قطعا على المجال $]-1,+\infty[$ و $\mathbb{R}_+ \subset]-1,+\infty[$ فإن $(u_n)_{n\geq 0}$ تناقصية قطعا .

II- **المتتاليات الحسابية و المتتاليات الهندسية:**

1)- **المتتاليات الحسابية:**

- **تعريف:**

نقول إن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية إذا وجد عدد حقيقي غير منعدم r بحيث :

$u_{n+1} = u_n + r$ لكل n من $\mathbb{N}$.

العدد r في هذه الحالة يسمى أساس المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$.

- **ملحوظة:**

رتابة متتالية حسابية $(u_n)_{n\geq 0}$ مرتبطة بإشارة أساسها r ، إذا كان $r > 0$ فإن $(u_n)_{n\geq 0}$ تكون تزايدية قطعا ، و إذا كان $r < 0$ فإن $(u_n)_{n\geq 0}$ تكون تناقصية قطعا .

- **مثال:**

لكل n من $\mathbb{N}$ نضع : $u_n = -5n + 10$

لدينا : $u_{n+1} - u_n = -5$ إذن : $u_{n+1} = -5 + u_n$ ، و بالتالي $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها $r = -5$.

- **تمرين06:**

بين أن حلول المعادلة $(E): \cos x + \sin x = 0$ الموجبة تكون حدود متتالية حسابية و حدد أساسها r و حدها الأول .

- **خاصية04:** لتكن $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية عددية .

تكون $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان : $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{u_n + u_{n+2}}{2} = u_{n+1}$

أو $\forall n \in \mathbb{N}^* : \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2} = u_n$.

- **خاصية05:**

إذا كانت $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية حسابية أساسها r فإن : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = u_0 + n.r$

و بصفة عامة : $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 : u_n = u_p + (n-p)r$.

- **تمرين07:**

نعتبر المتتاليتين $(u_n)_{n\geq0}$ و $(v_n)_{n\geq0}$ المعرفتين بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = -1; u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{u_n}{4}; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$ و $v_n = 2^n u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$.

أ- بين أن $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية حسابية و حدد أساسها r و حدها الأول .

ب- أحسب بدلالة n الحد العام u_n ، ثم إستنتج a_n بدلالة n .

- **خاصية06:**

إذا كانت $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية حسابية و $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}$ مجموع n حدا الأولى حيث $n \geq 1$ فإن : $S_n = n.\frac{u_0 + u_{n-1}}{2}$ ، و بصفة عامة :

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 / p < n : u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = \frac{(n-p+1).(u_p + u_n)}{2}$$

- **ملحوظة:** يمكن التعبير عن S_n بدلالة الحد الأول u_0 و الأساس r نحصل على :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \ S_n = nu_0 + \frac{n(n-1)r}{2} .$$

- **تمرين08:**

أ- حدد قيمة كل عدد من العددين S و T حيث :

$S = 6 + 10 + 14 + \ldots + 1002$ و $T = 5 + 16 + 27 + \ldots + 2007$.

ت- أحسب بدلالة n المجموع : $X_n = 1 + 6 + 11 + \ldots + (5n+1)$ ، ثم إستنتج قيمة العدد : $X = 1 + 6 + 11 + \ldots + 2006$.

ج- إذا كانت $(u_n)_{n\geq1}$ متتالية حسابية أساسها $r = -2$ و مجموع حدودها السبعة عشر الأولى هو $S_{17} = 1513$ ، فأحسب الحد الأول u_1 و u_{17} .

- **تمرين09:**

نعتبر المتتاليتين $(u_n)_{n\geq0}$ و $(v_n)_{n\geq0}$ المعرفتين ب :

$u_0 = \frac{1}{2}$ و $\forall n \in \mathbb{N} : \ u_{n+1} = \frac{u_n}{1+2u_n}$ و $\forall n \in \mathbb{N} : v_n = 1 + \frac{1}{u_n}$.

أ- بين أن $(v_n)_{n\geq0}$ متتالية حسابية و حدد أساسها r و حدها الأول v_0 .

ب- عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n لكل n من $\mathbb{N}$.

2)- المتتاليات الهندسية:

- **تعريف:** لتكن $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية عددية .

نقول إن $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية إذا وجد عدد حقيقي غير منعدم q بحيث :

$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = q\, u_n$ ، العدد q يسمى أساس المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$.

- **مثال:** لكل n من $\mathbb{N}$ نضع : $u_n = \frac{2^{3n}}{3^{2n}}$.

بين أن $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية و حدد أساسها q و حدها الأول .

- **خاصية07:** لتكن $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية عددية .

تكون $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية لإذا وفقط إذا كان : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n u_{n+2} = u_{n+1}{}^2$

أو $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_{n-1} u_{n+1} = u_n{}^2$.

- **خاصية08:**

إذا كانت $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية أساسها q فإن : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = u_0.q^n$

و بصفة عامة : $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 : u_n = u_p.q^{n-p}$.

- **تمرين10:** نعتبر المتتاليتين $(u_n)_{n\geq0}$ و $(v_n)_{n\geq0}$ المعرفتين بما يلي :

$u_0 = 3$ و $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = 1 - \frac{u_n}{2}$ و $\forall n \in \mathbb{N} : v_n = 3u_n - 2$.

أ- بين أن $(v_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية و حدد أساسها q و حدها الأول .

ب- عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n مهما يكن n من $\mathbb{N}$.

- **تمرين11:** نعتبر المتتاليتين $(u_n)_{n\geq0}$ و $(v_n)_{n\geq0}$ المعرفتين بما يلي :

$\begin{cases} u_0 = -1 ; u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{u_n}{4} ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ و $v_n = u_{n+1} - \frac{u_n}{2}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

أ- بين أن $(v_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية و حدد أساسها q و حدها الأول .

ب- عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n مهما يكن n من $\mathbb{N}$.

- **خاصية09:**

إذا كانت $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية أساسها $q \neq 1$ و $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1}$ مجموع n حدا الأولى حيث $n \geq 1$ فإن : $\forall n \in \mathbb{N}^* : S_n = u_0 . \frac{1-q^n}{1-q}$.

و بصفة عامة : $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 / p < n : u_p + u_{p+1} + ... + u_n = u_p . \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$.

- **تمرين12:**

أ- إذا كانت $(u_n)_{n\geq1}$ متتالية هندسية بحيث $u_4 = 16$ و $u_9 = 512$ فحدد أساسها q

ثم أحسب S_6 مجموع حدودها الستة الأولى .

ب- إذا علمت أن $(u_n)_{n\geq1}$ متتالية هندسية حدها الأول $u_1 = 7$ و أساسها $q = 2$

فحل في $\mathbb{N}^*$ المعادلة : $S_n = 1785$ ثم أحسب u_n .

ج- إذا علمت أن $(u_n)_{n\geq1}$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ ، فحل في $\mathbb{N}^*$ النظمة :

$(1) : \begin{cases} u_n = 27 \\ S_n = 3267 \end{cases}$ ، ثم أحسب الحد الأول u_1 .

- **تمرين13:**

نعتبر المتتالية $(x_n)_{n\geq0}$ بحيث : $\forall n \in \mathbb{N} : x_n = (-2)^n + 3n + 1$.

أحسب بدلالة n المجموع : $S = x_0 + x_1 + ... + x_n$.

3)- دراسة المتتاليات (u_n) بحيث : $u_{n+1} = au_n + b$

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة بحدها الأول u_0 و بالعلاقة $u_{n+1} = au_n + b$ حيث $a \in \mathbb{R}^*$.

إذا كان $a = 1$ فإن : $u_{n+1} = u_n + b$ إذن $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية حسابية أساسها $r = b$.

و إذا كان $b = 0$ فإن : $u_{n+1} = au_n$ إذن $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية أساسها $q = a$.

نفترض أن : $a \neq 1$ و ليكن α حل المعادلة $ax + b = x$ أي $\alpha = \frac{b}{a-1}$.

لدينا : $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - \alpha = a(u_n - \alpha)$ إذن $(u_n - \alpha)_{n\geq0}$ متتالية هندسية أساسها a

و بالتالي فإن : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = a^n (u_0 - \alpha) + \alpha$.

III- نهاية متتالية عددية:

نهاية متتالية عددية (u_n) عندما تؤول n إلى $+\infty$ إذا وجدت يرمز لها بالرمز $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

- **تعريف:**

إذا كانت (u_n) تقبل نهاية منتهية نقول إنها متقاربة ، و متباعدة إذا كانت لا تقبل نهاية أو كانت نهايتها لا منتهية .

- **ملحوظة:**

لدينا :

$\lim_{n\to+\infty} u_n = L \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} (u_n - L) = 0$ و $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} -u_n = +\infty$

1)- نهايات متتاليات مرجعية:

في الجدول التالي نلخص نهايات بعض المتتاليات المرجعية .

(u_n)	$n^\alpha / \alpha \in \mathbb{Q}_+^*$	$q^n / q > 1$	$n^\alpha / \alpha \in \mathbb{Q}_-^*$	$q^n / -1 < q < 1$
$\lim_{n\to+\infty} u_n$	$+\infty$	$+\infty$	0	0

- **ملحوظة:**

إذا كان $q \le -1$ فإن المتتالية (q^n) لا تقبل نهاية ، إذن فهي متباعدة .

- **تمرين14:**

حدد نهاية كل متتالية من المتتاليات (a_n) و (b_n) و (u_n) و (v_n) المعرفة ب :

$$a_n = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^n \text{ و } b_n = \frac{-3}{(1+10^{-11})} \text{ و } u_n = \frac{1+4^n}{1-4^n} \text{ و } v_n = \frac{\pi^n - 3^n}{\pi^n + 3^n}$$

- **خاصية10:**

إذا كانت (u_n) متتالية عددية حدها العام $u_n = f(n)$ حيث f دالة عددية معرفة على المجال $[k,+\infty[$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ فإن : $\lim_{n\to+\infty} u_n = L$.

- **ملحوظة:**

النتيجة السابقة صحيحة بالنسبة لنهاية L منتهية أو غير منتهية .

- **أمثلة:**

حدد نهاية كل متتالية من المتتاليتين $(u_n)_{n\ge 0}$ و $(v_n)_{n\ge 3}$ المعرفتين ب :

$$u_n = n - \sqrt[3]{n^3+1} \text{ و } v_n = \frac{4-n^2}{\sqrt{n-2}} .$$

2)- مصاديق تقارب متتالية عددية:

- **خاصية11:**

لتكن (u_n) متتالية عددية .

إذا وجدت متتالية (v_n) و عدد حقيقي L و k من $\mathbb{N}$ بحيث : $\forall n \ge k : |u_n - L| \le v_n$

فإن : $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = L$.

- **مثال:**

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\ge 0}$ التي حدها العام : $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n}$

لدينا : $u_n = \dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2 - \dfrac{1}{2^n}$

(لأن u_n مجموع $n+1$ حدا الأولى من متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$)

إذن : $\forall n \in \mathbb{N} : |u_n - 2| = \frac{1}{2^n}$.

و بما أن : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ ، فإن : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$.

- **تمرين15:** حدد النهاية : $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{(-3)^n + 2.\cos n}{4^n}$.

- **خاصية12:**

لتكن (u_n) متتالية عددية .

إذا وجدت متتاليتين عدديتين (v_n) و (w_n) و k من $\mathbb{N}$ بحيث :

$\forall n \ge k : w_n \le u_n \le v_n$ فإن : $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = L \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = L$

$\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ و $\lim_{n\to+\infty} w_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

- **تمرين16:** نعتبر المتتاليتين $(u_n)_{n\ge 0}$ و $(v_n)_{n\ge 1}$ المعرفتين ب :

$$u_n = \frac{2n^2 - 3.\sin n}{n^2+1} \text{ و } v_n = \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{n+\sqrt{n}} .$$

أ- بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{2n^2-3}{n^2+1} \le u_n \le \frac{2n^2+3}{n^2+1}$ ، ثم إستنتج $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

ب- بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* : \frac{n}{n+\sqrt{n}} \le v_n \le \frac{n}{n+1}$ ، ثم إستنتج $\lim_{n\to+\infty} v_n$.

- **تمرين17:** نعتبر المتتاليتين $(u_n)_{n\ge 0}$ و $(v_n)_{n\ge 1}$ المعرفتين ب :

$$u_n = \frac{3^n - 5^n}{1+2^n} \text{ و } v_n = n\left(\sqrt{n}-2\right)\tan\left(\frac{1}{n}\right) .$$

أ- بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n \le -\frac{1}{5}.\left(\frac{5}{2}\right)^n$ ، ثم إستنتج $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

ب- بين أن : $\forall n \ge k : v_n > \frac{\sqrt{n}}{2}$ (حيث $k \in \mathbb{N}$) ، ثم إستنتج $\lim_{n\to+\infty} v_n$.

3)- الترتيب و نهايات المتتاليات:

- **خاصية13:**

إذا كانت (u_n) و (v_n) متتاليتين متقاربتين بحيث : $\forall n \geq k : u_n \leq v_n$ (حيث $k \in \mathbb{N}$)

فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

- **إستنتاج:**

إذا كانت (u_n) متتالية متقاربة و حدودها موجبة (أو موجبة قطعا) فنهايتها تكون موجبة .

و إذا كانت (u_n) متتالية متقاربة و حدودها سالبة (أو سالبة قطعا) فنهايتها تكون سالبة .

4)- تقارب المتتاليات الرتيبة:

- **خاصية14:**

إذا كانت (u_n) متتالية تزايدية و مكبورة بعدد β فهي متقاربة و نهايتها L تحقق $L \leq \beta$.

وإذا كانت (u_n) متتالية تناقصية و مصغورة بعدد α فهي متقاربة و نهايتها L تحقق $L \geq \alpha$.

- **إستنتاج:**

إذا كانت (u_n) متتالية تزايدية و حدودها سالبة فهي متقاربة و نهايتها تكون أيضا سالبة .

و إذا كانت (u_n) متتالية تناقصية و حدودها موجبة فهي متقاربة و نهايتها موجبة .

- **تمرين18:**

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي : $u_0 = 1$ و $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{2}$.

أ- بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} : 1 \leq u_n < 2$ ، ثم إستنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ تزايدية قطعا .

ب- أثبت أن $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة و حدد نهايتها .

5)- المتتاليات المتحادية:

- **تعريف:**

نقول إن متتاليتين $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ متحاديتان إذا كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ تزايدية و $(v_n)_{n\geq 0}$ تناقصية و تحقق الشرطان :

$\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq v_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$.

- **ملحوظة:**

إذا كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ متتاليتين متحاديتين فإنهما متقاربتان و لهما نفس النهاية .

- **مثال:**

نعتبر المتتاليتين $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ بحيث :

$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$ و $v_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1}$.

لدينا : $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$ ، إذن $(u_n)_{n\geq 1}$ تزايدية قطعا .

و $\forall n \in \mathbb{N}^* : v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{2n(2n+1)}$ ، إذن $(v_n)_{n\geq 1}$ تناقصية قطعا .

و بما أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* : v_n - u_n = \frac{1}{2n}$ فإن من جهة : $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n < v_n$

و من جهة أخرى : $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} = 0$

إذن $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ متتاليتان متحاديتان .

- **تمرين19:**

نعتبر المتتاليتين العدديتين $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ المعرفتين بما يلي : $u_1 = 1$ و $v_1 = 12$

$u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$ و $v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

أ- لتكن $(x_n)_{n\geq 1}$ المتتالية العددية التي حدها العام $x_n = v_n - u_n$ لكل n من $\mathbb{N}^*$.

بين أن $(x_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية و حدد أساسها و حدها الأول ، ثم إستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

ب- أثبت أن $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ متتاليتان متحاديتان و إستنتج أنهما متقاربتين .

ج- لتكن $(y_n)_{n\geq 1}$ المتتالية التي حدها العام $y_n = 3u_n + 8v_n$ لكل n من $\mathbb{N}^*$.

بين أن $(y_n)_{n\geq 1}$ متتالية ثابتة ، ثم حدد نهايتي المتتاليتين $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$.

IV- دراسة المتتاليات الترجعية $u_{n+1} = f(u_n)$:

- **خاصية15:**

إذا كانت f دالة معرفة على مجال I و (u_n) متتالية حدودها عناصر من I بحيث :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ و $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = b$.

- **مبرهنة:**

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ بحيث $u_{n+1}=f(u_n)$ حيث f دالة متصلة على مجال I و $u_0\in I$

إذا كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة فإن نهايتها L هي حل المعادلة $f(x)=x$ حيث $x\in I$.

- **تمرين20:**

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي : $u_0=\frac{1}{2}$ و $\forall n\in\mathbb{N}: u_{n+1}=\frac{2u_n}{1+u_n^2}$

و لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$.

أ- بين أن الدالة f متصلة على المجال $I=]0,1[$ و أن : $f(I)\subseteq I$.

ب- بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}: u_n\in I$ و أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ رتيبة قطعا ، ثم إستنتج أنها متقاربة و حدد نهايتها .

- **تمرين21:**

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي : $u_0=-\frac{1}{2}$ و $\forall n\in\mathbb{N}: u_{n+1}=\frac{u_n}{\sqrt{2+u_n}}$

و لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+2}}$.

أ- بين أن f متصلة على المجال $I=]-1,0[$ و أن : $f(I)\subseteq I$.

ب- بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}: u_n\in I$ و أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ رتيبة قطعا ، ثم إستنتج أنها متقاربة و حدد نهايتها .

- **تمرين22:**

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة ب : $u_0=-1$ و $\forall n\in\mathbb{N}: u_{n+1}=u_n^2+3u_n+\frac{1}{4}$.

و لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=x^2+3x+\frac{1}{4}$

أ- بين أن : $f(I)\subseteq I$ حيث $I=\left[-2,-\frac{1}{2}\right]$ ، و أن : $\forall n\in\mathbb{N}: u_n\in I$.

ب- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ تزايدية ، ثم إستنتج أنها متقاربة و حدد نهايتها .

V- دراسة المتتاليات (u_n) بحيث : $u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n$

هدفنا البحث عن جميع المتتاليات (u_n) التي تحقق العلاقة :

$(E):\forall n\in\mathbb{N}: u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n$ ، حيث a و b عددين حقيقيين معلومين .

- **تعريف:**

المعادلة $(E_0): x^2-ax-b=0$ تسمى المعادلة المميزة للعلاقة (E) .

- **تحديد المتتاليات (u_n) التي تحقق العلاقة (E):**

لإيجاد جميع المتتاليات (u_n) التي تحقق العلاقة (E) نحل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة المميزة (E_0) التي مميزها : $\Delta=a^2+4b$.

إذن هناك ثلاث حالات ممكنة نلخصها في الجدول التالي :

إذا كانت المعادلة المميزة (E_0) تقبل :	فإن المتتاليات التي تحقق العلاقة (E) هي :
جذرين حقيقيين مختلفين q_1 و q_2 : (في حالة $\Delta>0$)	$u_n=\alpha.q_1^n+\beta.q_2^n \,/\, (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$
جذرا حقيقيا مزدوجا q_0 : (في حالة $\Delta=0$)	$u_n=(\alpha.n+\beta).q_0^n \,/\, (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$
جذرين عقديين مترافقين (في حالة $\Delta<0$) $z=[q,\theta]$ و $\overline{z}=[q,-\theta]$.	$u_n=(\alpha\cos n\theta+\beta\sin n\theta).q^n$ حيث $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

- **مثال:**

لنحدد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ التي تحقق : $u_0=1$ ، $u_1=2$ و $\forall n\in\mathbb{N}: u_{n+2}=5u_{n+1}-4u_n$

مميز المعادلة المميزة $(E_0): x^2-5x+4=0$ هو : $\Delta=9$.

إذن فهي تقبل جذرين حقيقيين مختلفين هما : $q_1=1$ و $q_2=4$ و بالتالي فإن :

$$\forall n\in\mathbb{N}: u_n=\alpha+\beta.4^n$$

و بما أن : $u_0=1$ ، $u_1=2$ فإن : $\alpha=\frac{2}{3}$ و $\beta=\frac{1}{3}$ ، إذن : $\forall n\in\mathbb{N}: u_n=\frac{2+4^n}{3}$

abouzakariya@yahoo.fr